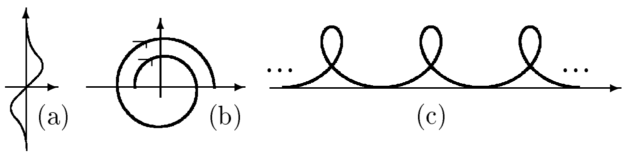
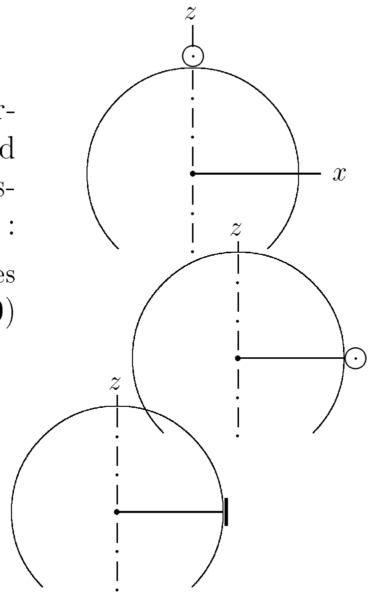
10) Für Erfinder.



Möglichst einfache 2D Vektorfunktionen $\vec{r}(t)$ sollen notiert werden, so daß Bahnkurven der skizzierten Form entstehen. Bei (b) soll der Parameter $\omega t =: \tau$ von 0 bis 2π laufen, bei (a) und (c) von $-\infty$ bis $+\infty$. (Obacht: $[\vec{r}]$=Länge.) Bei (c) kreist etwas auf einem Föderband. Dessen Geschwindigkeit v darf, damit sich Schleifen bilden, nicht zu groß sein : $v < ?$

$.5 + 1 + 1.5 =$ 3

11) Riesenräder : $\vec{r}(t) = ?$



(a) Die Erde (R) dreht sich mit Ω um die z–Achse (Ursprung=Erdmitte). Am Nordpol steht ein Riesenrad (Radius ϱ, Winkelgeschwindigkeit ω). $\vec{r}(t)$ sei der Ortsvektor der Gondel, welche zur Zeit $t = 0$ unten ist : $\vec{r}(0) = (0, 0, R)$. Aus $\vec{r}(t)$ bilden wir auch $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ [dies aber nur zu Teil (a)] und sehen nach, ob die Beträge $v(0)$ und $v(\pi/\omega)$ gleich sind.

(b) Wie bei (a), aber das Riesenrad steht am Äquator. $\vec{r}(0) = (R, 0, 0)$.

(c) Wie bei (b), aber das Rad liegt flach, ist also ein ebenerdiges Karussell. $\vec{r}(0) = (R, 0, -\varrho)$.

Nie soll man ohne Vorbereitung in ein Unglück stürzen. Wir behandeln darum zu jeder dieser drei Situationen erst einmal eine Vorstufe (vs), in welcher die Erde ruht ($\Omega = 0$) : $\vec{r}_{\mathrm{vs}}(t) = ?$ Und dann hilft es vielleicht, vom Polarstern aus auf das Geschehen herab zu blicken, also seine Projektion auf die xy–Ebene zu betrachten (malen ?!!).
Abkürzungen : $s := \sin(\omega t)$, $c := \cos(\omega t)$, $S := \sin(\Omega t)$, $C := \cos(\Omega t)$.

$2.5 + 1 + 1.5 =$ 5

12) Differentialquotient.

Um die Ableitung $f'(x)$ zu erhalten, benötigt man nur gewisse Eigenschaften von $f(x)$ wie zum Beispiel das f–Verhalten an einer Stelle und eine funktionale Relation.

(a) $f(\varepsilon) = \varepsilon + O(\varepsilon^2)$, $f(\frac{x+y}{1-xy}) = f(x) + f(y)$. Irgendwie muß $f(x+\varepsilon)$ ins Spiel. Also setzen wir $\frac{x+y}{1-xy} \stackrel{!}{=} x + \varepsilon$, bestimmen daraus y und reduzieren es auf seinen in ε linearen Term. Und schon paßt alles zusammen: $f'(x) = ?$
Oben steht bereits, wie f durch den Ursprung läuft. f' besagt, wie es rechts und links weitergeht: qualitative Skizze f über x ! (Weil sie so schön ist, geben wir der Funktion $f(x)$ später einmal einen Namen. Aber vorerst ist hier der Griff in höhere Schubladen verboten.)

(b) Dem folgenden Text läßt sich etwas über $f(1+\varepsilon)$ abgewinnen. Danach hilft dann vielleicht die Umformung $x + \varepsilon = x \cdot (1 + \frac{\varepsilon}{x})$ aus der Klemme.

Das Wachstum einer Bakterien–Kultur wurde in der Form $t/t_0 = f(N/N_0)$ dokumentiert, wobei t_0 eine bekannte feste Zeit ist und N_0 die Bakterien–Anzahl zur Zeit $t = 0$. Solange die Zunahme ΔN ihrer Anzahl noch relativ klein war, wurde $t = t_0 \cdot 3\Delta N/N_0$ ermittelt. Ansonsten ergab sich $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$. Aus diesen Angaben gewinnen wir $f'(x)$, notieren, wie sich allgemein eine kleine Zunahme dN durch das zugehörige Zeitintervall dt ausdrückt, und skizzieren den Verlauf von t/t_0 über N/N_0.
[PB 4/3]

$1.5 + 2.5 =$ 4