22) Drehmatrix und Achse

Lang ists her [Ü. 8 (a)], da hatten wir ein VONS $\vec{f}_j$ konstruiert und somit unsere erste Drehmatrix erhalten :

$$D = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) Daß $DD^T = 1$ gilt, ist wegen $\vec{f}$–Orthonormierung trivial. Ob wirklich auch $D^T D = ?$ das Gewünschte liefert ? Um welche Achse $\vec{b} = ?$ dreht D ?

(b) In Übung 8 (a) war auch vom Ort $\vec{r} = (7, 4, -4)\, a$ eines Teilchens (m) die Rede und von seiner dortigen Geschwindigkeit $\vec{v} = (1, 4, -1)\, u$. Welche Komponenten bekommen $\vec{r}$ und $\vec{v}$ im neuen System, d.h. $\vec{r}\,' = ?$ und $\vec{v}\,' = ?$

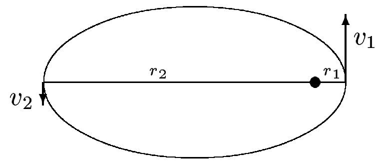
(c) Nun rechnen wir den Drehimpuls $\vec{L}$ des Teilchens im alten System aus, bilden $\vec{L}\,' = D\,\vec{L}$ und sehen nach, ob dies auch per $m\,\vec{r}\,' \times \vec{v}\,'$ herauskommt.

(d) Schließlich verschaffen wir uns den Kosinus (=: c) und den Sinus (=: s) des Drehwinkels und bilden $c^2 + s^2$ zur Kontrolle.

$1.5 + .5 + 1.5 + 1.5 =$ 5

23) Komet auf Rundkurs

Zur Bahn eines Kometen(m) ist der kleinste (r_1) und der größte Abstand (r_2) von der Sonne (M) bekannt.



(a) Die Erhaltungssätze liefern uns zwei Gleichungen für die Geschwindigkeiten an diesen zwei extremalen Punkten : $v_1 = ?$ und $v_2 = ?$

(b) Im Diagramm $V_{\text{eff}}(r)$ über r liegen bei r_1 , r_2 die Schnittpunkte mit der E–Horizontalen (Skizze !). Aus $V_{\text{eff}}(r_1) = V_{\text{eff}}(r_2)$ erhalten wir den Drehimpuls $L = ?$ des Kometen (als Fkt. von r_1, r_2) und aus diesem zur Kontrolle erneut z.B. v_1 .

$1 + 1 =$ 2

24) $\boldsymbol{q}$ in $\vec{\boldsymbol{B}}$ mit Reibung $\sim \boldsymbol{v^2}$

In einer Wilsonschen Nebelkammer mit homogenem Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$ wird ein Teilchen $(m,\, q)$ immer langsamer. Mit Blick auf TU 5, 1) erscheint Reibung $\sim v^2$ recht realistisch. Startsituation sei jene zur Übung 16 (a) . Jedoch werde hier bescheiden nur nach $\vec{v}(t)$ gefragt. Daraufhin bringen wir — wohltrainiert, messerscharf und unverzüglich — den Eindeutigkeitsrahmen zu Papier :

$$\boxed{\dot{\vec{v}} = \frac{q}{m}\,\vec{v} \times \vec{B} - \alpha\, v\, \vec{v} \quad , \quad \vec{v}(0) = (\,0\,,\, v_0\,,\, 0\,)}$$

(a) Vorübung. Ohne Magnetfeld [und mit $v_2(t) =: v(t)$] wäre $\boxed{\dot{v} = -\alpha\, v^2\,,\ v(0) = v_0}$ zu lösen. Wir versuchen es auf zwei Weisen (mit bitte übereinstimmendem Resultat für $v(t)$) :

I. $v(t) =: 1/\xi(t)$. ER (Dgl und Anfangsbedingung) für die neue Fkt. $\xi(t)$? Lösen !

II. wir suchen nach $t(v)$ (statt nach $v(t)$). Ob die Fußnote nottut ? ER für $t(v)$? Lösen !

(b) Um das volle Problem mit $\vec{B}$ zu lösen, schreiben wir $\vec{v}(t)$ erst einmal als Betrag mal Einheitsvektor auf : $v(t) \cdot \vec{e}(t)$. Das geht immer. Es könnte ja nun so sein, daß sich die Reibung nur auf $v(t)$ auswirkt, während der zeitabhängige Einheitsvektor jener von Übung 16 (a) bleibt (jener von $\vec{v}$ natürlich). Aber vielleicht ist das falsch. Wie lautet Ihre Antwort ?

$3 + 2 =$ 5

$\dot{v}(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{\frac{dt}{dv}} = \dfrac{1}{t'(v)}$ — aber ja doch, natürlich !! Beim Lösen von Differentialgleichungen läßt sich übrigens die Unfähigkeit der Menschheit hautnah erleben. Wenn von zwei Handvoll Tricks (wie z.B. I und II.) keiner funktioniert, dann g e h t e s n i c h t . Gute Nacht.