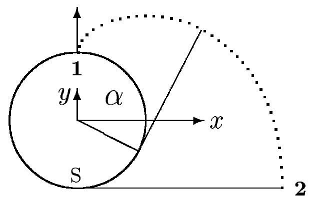
43) Zwei Kurvenlängen $\int_C ds$



(a) Welche Länge L hat der punktierte Weg, den ein Stein zurücklegt, welcher an einem um die Erde (R) gewickelten Faden hängt, am Nordpol (Punkt **1**) hochgeworfen wird und schließlich die skizzierte Horizontale bei **2** erreicht ?

(Schlauer Parameter ist der Winkel α zwischen y–Achse und Fadenablösepunkt: $\vec{r}\,(\alpha) = \therefore + \therefore = ?$)

(b) Eine Walze (R) rollt die x–Achse entlang. Skizze ?! Welchen Weg ($L = ?$) legt ein Randpunkt zurück, während er ab Unterlage die maximale Höhe $2\,R$ erreicht ?

(Sagt er doch frech $L = 4R$, der Bronstein, Stichwort *Zykloide*. Aber das kann ja falsch sein.)

$2 + 2 =$ 4

44) Die Erde ist eine Scheibe

liegt in der xy–Ebene (Zentrum = Ursprung) und hat Radius R. Ihre Masse M ist homogen verteilt, d.h. die konstante Masse/Fläche der Scheibe ist $\sigma = ?$ Irgendwo im Raum bei $\vec{r}$ fliegt eine Raumsonde (m) herum und spürt den negativen Gradienten des Potentials V der Scheibe.

(a) Wir schreiben $V(\vec{r}\,)$ als ebenes Flächenintegral auf, und zwar in Polarkoordinaten. Obacht, davon gibts 2 Sorten: ρ' und φ' mögen die Scheibe abgrasen, während $\vec{r} = (\,\rho\cos(\varphi)\,,\ \rho\sin(\varphi)\,,\ z\,)$ in Zylinderkoordinaten die Sonde positioniert.

(b) Aus Symmetriegrund kann V kann nicht von φ abhängen. Auch das bei (a) notierte Doppelintegral sollte diese Unabhängigkeit zeigen. Wie gelingt das ?

(c) Anschaulich ist auch klar, auf welchen asymptotisch führenden Term $V_\infty = ?$ sich V bei $r \to \infty$ reduzieren muß. Folgt auch dies flugs aus Ihrem $\iint$ von (a) ?

(d) Bleibt die Sonde auf der z–Achse, so sind die Integrale für $V(0,0,z)$ ausführbar. Welcher Term bleibt übrig (V–Konstante weglassen!), wenn z so klein wird, daß man gegen 1 kein $O(z^2/R^2)$ mehr wahrnehmen kann ? ((Endlich verstehen wir den eingeklammerten mysteriösen Satz im Text zu Ü 40 (b) !))

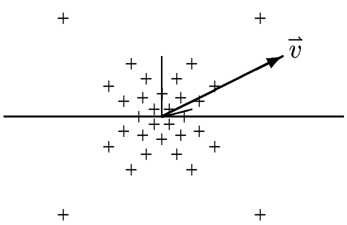
$1.5 + .5 + .5 + 1.5 =$ 4

45) und Gauß (1777–1855) war Meteorologe (April, April)

Nach Blitzschlag fliegt eine positiv geladene Wolke mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = (\,v_1\,,\ 0\,,\ v_3\,)$ nach rechts–oben weiter ($v_3 > 0$). Ladungs– und Stromdichte erfüllen den Raum:

$$\rho(\vec{r}, t) = \left(\frac{b}{\sqrt{\pi}\,a}\right)^3 \mathbf{e}^{-\dfrac{(\vec{r}\,-\,\vec{v}\,t)^2}{a^2}} \quad , \quad \vec{\jmath}\,(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)\cdot\vec{v} \quad .$$

Der rechts stehende Zusammenhang gilt (aufgrund der Definitionen) nur, wenn alle Anteile des Ladungshaufens mit dem gleichen konstanten $\vec{v}$ fliegen und wenn ρ wirklich diese *fliegenden* Anteile erfaßt. In einem Leitungsdraht ist hingegen $\rho_{\text{gesamt}} = 0$ wegen der ruhenden positiven Atomkerne.



(a) Welche Dimensionen haben die Konstanten a und b ? Welche Gesamtladung Q hängt zur Zeit $t = 0$ im Raum ? Im Kopf: mittels Verschiebetrick wird klar, daß auch zu jeder späteren Zeit diese Gesamtladung Q vorliegt.

(b) Welcher Strom $I(t)$ — als ebenes Flächenintegral auszuwerten — fließt durch die Ebene $z = 0$?

$1.5 + 2.5 =$ 4

Bei Integrand $\sqrt{1 - \text{trig(x)}}$ sei Substitution $\text{trig}(x) = u$ einen Versuch wert, meint der Osterhase (trig = eine der trigonometrischen Fktn). Er hat auch das Ei „ $\partial_{\text{Parameter}}$ Hilfsintegral“ irgendwo auf diesem Blatt versteckt (nach unten wirds wärmer).