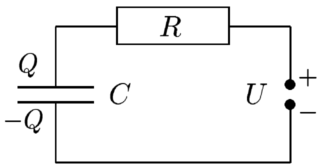
49) Rekonstruktion des Quellenfeldes

Zum Graviationspotential $V(r)$ eines kugeligen Sterns war die Vorlesung voreilig zu einem Spezialfall übergegangen. Sie aber kommen (ohne $\rho(r)$ zu spezifizieren) noch voran bis $V(r) = -\gamma m 4\pi \left[\frac{1}{r}\int_0^{?} \ldots + \int_{?}^{\infty} \ldots \right]$.
Antwort V gemessen, Ursache ρ gesucht. Dazu solle man (Behauptung) den Operator $\Delta_r := \frac{1}{r}\partial_r^2\, r$ auf $V(r)$ anwenden. Soso. Mit Hilfe des obigen Integralausdrucks können wir ja nachsehen: $\Delta_r V(r) = \,?$
Und $\Delta := \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ auf eine nur–r–abhängige Fkt. $f(r)$ anzuwenden, gäbe das Gleiche wie Δ_r–Anwendung. Na, das rechnet sich doch einfach nach. 3

50) RC–Glied



Sitzt auch eine Spule im Kreis, dann folgt die obere Kondensatorladung $Q(t)$ der Dgl $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = U$ — ein „getriebener 1D harmonischer Oszillator mit Reibung", nicht wahr. Wegen $\dot{Q} = I = U/R$ (Ohma) und $Q = CU$ (Faktor C heißt *Kapazität*) sind in der Dgl nur Potentialunterschiede (*Spannung* $U :=$ V–Unterschied$/q$) addiert: einmal herum gibt Null. Den L–Term wird uns später mal Mr. Maxwell erklären. Hier: $L = 0$.
$Q(0) = 0$. Während die Spannung linear anwächst, $U(t) = R_0\omega^2\alpha\, t$, „altert" der Widerstand: $R(t) = R_0(1+\omega t)$. Die Kapazität habe den konstanten Wert $C = 1/(2\omega R_0)$.

(a) Bei Übergang zu neuer Funktion $y(x)$, abhängig von dimensionsloser „Zeit" x, bekommt die Q–Dgl die nebenstehende Form.

$$x\,y' + 2\,y = 3\,x \qquad (*)$$

Wie hängt x mit t und wie $Q(t)$ mit $y(x)$ zusammen ? Anfangsbedingung $y(\,?\,) = \,?$

(b) Anders als im WS ermitteln wir zuerst die a l l g e m e i n e Lösung von $(*)$, und zwar (unabhängig voneinander) auf vier verschiedene Weisen, nämlich

① per Lösen der homogenen Dgl und Raten einer speziellen der inhomogenen

② unter Verwendung der *PQ–Formel*

③ mittels *Neuer Funktion* u per $y =: x\,(u+1)$ und *Trennung der Variablen*

④ über *Neue Variable* τ per $x =: e^{\tau}$ und *Variation der Konstanten*

(c) Jetzt erst kehren wir zur Elektrotechnik zurück, unterwerfen die allgemeine Lösung der Anfangsbedingung, führen t wieder ein und schreiben die Ladung $Q(t)$ ausführlich auf. Auf welchen asymptotisch führenden Term $Q_\infty(t)$ reduziert sie sich nach langer Zeit ? Meist kann man so eine Langzeit–Antwort auch direkt aus der ursprünglichen Dgl durch dortige Vorab–Vereinfachungen gewinnen.
Gelingt Ihnen dies auch hier ? $2 + 3.5 + 1.5 =$ 7

51) Weltmodell I

Vielleicht — am grünen Tisch geht vieles — läßt sich das aus $\dot{N} = (G - S)\,N$ mit $N(0) = N_0$ folgende Bevölkerungsproblem ($G =$ Geburtenrate, $S =$ Sterberate) dadurch entschärfen, daß man die Raten gemäß im Laufe der Zeit sanft einander angleicht.

$$G - S = \frac{\alpha}{(1+\gamma t)^{\lambda}} \quad , \quad \lambda > 0$$

Welche Zukunft gibt das: $N(t) = \,?$ Welchen Wert λ_0 muß λ mindestens haben, damit N bei $t \to \infty$ gegen einen endlichen Wert strebt ? Welche Lösung hat die N–Dgl bei genau $\lambda = \lambda_0$? Und wenn $\lambda = 2$, $\alpha = \gamma$ und $N_0 = 6\,$Mrd., welchen Sättigungswert $N_\infty \approx \,?$ erreichen wir dann noch ? 2