52) Weltmodell II

Wir haben keine Weltregierung. Eine so vernünftige wie in Übung 51 ist auch so bald nicht zu erwarten. Es wird Selbstlauf geben. In $\dot{N} = (G-S)N$, $N(0) = N_0$, machen wir den Faktor $G-S$ von einer pauschalen Vorratsgröße V abhängig (Rohstoffe, bebaubares Land, Luftsauerstoff etc.): $G-S = G_0 - S_0 + \alpha\,(V - V_0)$, $V(0) = V_0$, welche (sehr pessimistisch) $\sim N$ abnimmt: $\dot{V} = -\beta N$. Wie auch immer man $G-S$ abnehmen läßt, man kann es als Abnahme der Geburtenrate lesen (leider nicht sehr realistisch) oder aber (makaber) als Zunahme der Sterberate.
Mit „Zeit" $\tau = \sqrt{\alpha\beta N_0}\,t$ und bei Übergang $N(t) = N_0 u(\tau)$, $V - V_0 = -\sqrt{\beta N_0/\alpha}\,v(\tau)$ zu den zwei neuen Funktionen u, v versammeln sich alle Konstanten in einer einzigen: $\eta = (G_0 - S_0)/\sqrt{\alpha\beta N_0}$. Das Dgl–System (zuzüglich Anfangsbedingungen) bekommt dabei die schöne Gestalt

$$\boxed{u' = u \cdot (\eta - v) \;,\; v' = u \quad,\quad u(0) = 1 \;,\; v(0) = 0}$$

Stimmt das ? Welche Dgl für v allein folgt hieraus ? Welche Besonderheit hat sie ? Usw. Alles funktioniert, und wir kommen analytisch durch bis zur Lösung $u(\tau)$. 6

Unterwegs fällt einige Arbeit an. Starke Empfehlung, zu jeder Hilfs– oder Teil–Dgl stets auch ihre Anfangsbedingung zu notieren (ER's!). Ob $\frac{1}{2+2\eta v - v^2} = \frac{1}{\omega^2 - (v-\eta)^2} = \partial_v \frac{1}{2\omega} \ln\left(\frac{\omega-\eta+v}{\omega+\eta-v}\right)$ mit $\omega := \sqrt{2+\eta^2}$ stimmt und sogar plötzlich zu gebrauchen ist ? Kennt man $v(\tau)$, so auch $u(\tau)$. Nach so vielen Gelegenheiten, sich zu verrechnen, möchte man wohl gern vergleichen: $u(\tau) = \frac{4\omega^2\, e^{\omega\tau}}{[\,(\omega-\eta)\, e^{\omega\tau} + \omega + \eta\,]^2}$. Aber hoffentlich stimmt das nicht, denn die Langzeit–Prognose fällt ersichtlich arg traurig aus. [≈ PB 18/1]

53) Greensche Funktion von Δ_r

Der Operator $\Delta_r = \frac{1}{r}\partial_r^2 r$ ist nicht translationsinvariant. Seine Greensche Funktion $G(r,a)$ hängt also nicht vom Differenzargument ab. Bereich: positive r–Halbachse.

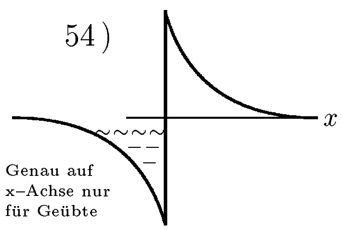
(a) Wir ermitteln jene spezielle Greensche Funktion, welche bei $r < a$ verschwindet.

(b) $G(r,a)$ liefert uns eine spezielle Lösung $V_{\rm sp} = ?$ von $\Delta_r\, V(r) = 4\pi\gamma m\, \rho(r)$

(c) Nach Addition der allgemeinen Lösung $V_{\rm hom} = ?$ der homogenen Dgl muß sich doch wohl unser integral–dargestelltes $V(r)$ aus Übung 49 ergeben. Nein ? Doch !

Allerdings kann der arme Operator Δ_r am linken Ende der r–Halbachse nicht über die Stelle $r = 0$ hinweg differenzieren. Er läßt darum einen Term zu, dessen Koeffizienten wir erst mit physikalischem Argument auf Null zwingen können und dürfen.
$1.5 + .5 + 1 =$ 3

54)



Matterhorn

Nicht ganz? Jedenfalls ist es ein eindrucksvolles „Horn", dieses Felsmassiv mit Höhenprofil

$$H(x,y) = H_0 \arctan\left(\frac{2ax}{x^2+y^2}\right) .$$

Welcher Gleichung folgen die Äqui–H–Linien und wie liegen sie (Skizze!) in der xy–Ebene ? Wir bilden das Gradientenfeld von H , sehen es uns speziell auf der y–Achse an ($\nabla H|_{x=0} = ?$) und skizzieren dort ein paar repräsentative Pfeile. Das Feld $\nabla H|_{x=0}$ sollte sich auch ergeben, wenn wir ∇ in Polarkoordinaten aufschreiben (= ?), auf $H(r,\varphi)$ anwenden und schließlich $\varphi = \pi/2$ setzen. Nicht wahr ? 3