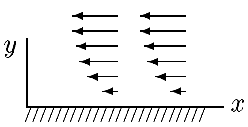
55) **rot $\vec{?}$** $=$ $\overrightarrow{\text{Wirbelstärke}}$



(a) Am Ufer (x–Achse) der Leine nimmt die Wirbelstärke zur Flußmitte hin (y–Richtung) ab: $\quad \mathrm{rot}\vec{v} = \vec{e}_3\, \omega\, e^{-y/a}$. $\quad \vec{v}(\vec{r}) = ?$

Ansatz ?! „Beim Aufleiten bleibt doch eine Konstante übrig“ – „?↯ Wir machen hier S i n n ! “

(b) Inmitten eines großen tiefen Sees. Aus Beobachtung der (sich ständig aufwärts bewegenden) Algen kennt man die Wirbelstärke der dort vorliegenden stationären, quellenfreien und zylindersymmetrischen Strömung: $\quad \mathrm{rot}\vec{v} = g(\rho)\, \vec{e}_\varphi$. $\quad \vec{v}(\vec{r}) = ?$

ρ ist Zylinderkoordinate. Ansatz $\overset{!}{=}$ quellenfrei. Ihr Resultat enthält ein Integral über $g(\rho)$. Aber zu $g(\rho) = \alpha\, \delta(\rho - R)$ wird $\vec{v}$ ganz konkret (innen/außen) und enthält auch hier wieder (See ∞ groß, nachdenken) keine Konstante mehr.

(c) Gratulation! – Sie haben soeben das Magnetfeld einer Spule (R) ermittelt. Falls nämlich dieser Herr Maxwell mit $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ und $\mathrm{rot}\vec{B} = \vec{\jmath}/(\varepsilon_0 c^2)$ (Statik) recht hat, dann brauchen wir nur $\vec{v}$ als $\vec{B}$ zu lesen. Welchen Wert hat folglich der Vorfaktor α, wenn in jedem Höhenintervall h ein bekannter Strom I_h in der Zylinderwand umläuft ?

$1.5 + 2.5 + 1 =$ 5

56) Landau — und mit Green mutig nach 4D

(a) Mittels Green hatten wir auf $\boxed{\text{P 18}}$, 4) $\quad x_{\mathrm{sp}}(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t da\ \sin\left[\omega(t-a)\right]\, k(a)$ erhalten. Es löst offenbar $\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = k(t)\ ,\ \dot{x}(0) = 0\ ,\ x(0) = 0}$. Auch LL's $\partial_t^2 + \omega^2 = (\partial_t + i\omega)\,(\partial_t - i\omega)$ –Methode muß auf dieses x_{sp} führen. Ob wir das können ?!

(b) In der Tabelle findet sich auch der translationsinvariante Operator $\partial_t - D\Delta$. Er wirkt auf $\vec{r}, t$–abhängige Felder. Angewandt auf G muß sich $\delta(\vec{r})\,\delta(t)$ ergeben. $G(\vec{r}, t) \overset{?!}{=} \theta(t)\, \left(\frac{1}{4\pi D t}\right)^{\frac{3}{2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4Dt}}$ nachzuprüfen dürfte reines Differenzieren sein. Tun !

$2.5 + 1.5 =$ 4

57) Weltmodell `III`

Die meisten „Vorräte“, die natürlichen Ressourcen der Erde, können sich regenerieren. In Richtung Realität hat unser pessimistisches Modell `II` eine entsprechende Modifikation nötig: $\dot{V} = -\beta\,(N - N_1)$. Sinkt die Erdbevölkerung unter N_1 , so nimmt V wieder zu. Wir setzen $N_1 = \lambda N_0$ ($N_1 = 4.8$ Mrd. – blauäugig? – hieße $\lambda = .8$). Der ER von Übung 52) wird damit zwei–parametrig (Nachprüfen sei diesmal unnötig) und ist (wg. Nichtauflösbarkeits–Falle) auf dem dortigen Wege nicht mehr lösbar. Soso. Dann sei wenigstens das qualitativ Wesentliche herausgearbeitet:

$$\boxed{u' = u \cdot (\eta - v)\ ,\ v' = u - \lambda\ ,\ u(0) = 1\ ,\ v(0) = 0}$$

Neue Funktion $x(\tau) = \ln(u(\tau))$ (noch Dgl-System) / Dgl zweiter Ordnung für x allein / x-Anfangsdaten / Energiesatz $T + U = E$ mit $U(x) = e^x - \lambda x - 1$, $T = ?$ und $E = ?$ / Minimum $x_0 = ?$ von U / $U(x)$–Skizze zu $\lambda = 0$ / $U(x)$–Skizze zu $0 < \lambda < 1$ mit E–Horizontale und Umkehrpunkten.

Weil wir solche U-Bilder zu „lesen“ verstehen, sehen wir, was qualitativ passiert. Der $N(t)$–Verlauf (bald auf SB) folgt überraschend genau dem Standardlauf der 90–parametrigen Maedows–Studie von 1972 [„Die Grenzen des Wachstums“ rororo Nr. 19510 ist vergriffen. Siehe jedoch (gleicher Titel) Maedows/Maedows/Zahn/Milling und Maedows/Maedows/Randers : „Die neuen Grenzen des Wachstums“ (1993)] .

3

Irgendwo auf diesem Blatt möchten Sie Integrale vertauschen: Fläche malen und ablesen, welche Grenzen sich „andersherum“ ergeben. Wie der Integrand von x, y abhängt, ist dabei egal !

$$\int_0^a dx \int_0^{f(x)} dy \ldots = \int_0^{f(a)} dy \int_{f_u(y)}^a dx \ldots$$