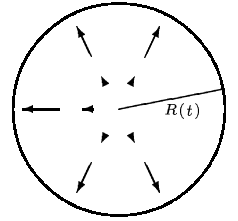


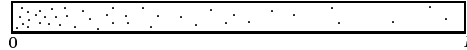
61) Zwei mal Conti

- (a) Ein Gas aus N Teilchen ist in einer Kugel (R_0) eingeschlossen. Deren Radius wird nun ab Zeit $t=0$ mit konstanter Geschwindigkeit v vergrößert: $R(t) = R_0 + vt$. Dabei bleibe die Teilchendichte $n(t)$ unabhängig vom Ort $\vec{r}$. Wie hängt folglich die Teilchen-Stromdichte $\vec{j}(r, t)$ von Ort und Zeit ab?



[PB 19/2 (a)]

- (b) Kundt'sches Rohr



In einem bei $x=0$ und $x=L$ verschlossenen Rohr hat sich eine stehende Schallwelle mit maximal möglicher Wellenlänge ausgebildet: $n(x, t) = n_0 + n_1 \cos(kx) \cos(\omega t)$. n ist die Luft-Teilchendichte, $\omega > 0$ und $n_1 \ll n_0$ sind bekannt. Teilchen-Stromdichte $\vec{j}(x, t) = ?$ Konstante $k = ?$

2.5 + 1.5 =

4

62) Vektorpotentiale

- (a) Das von einer gegebenen Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ verursachte Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ können wir inzwischen per Ansatz oder mittels Stokes oder auch über $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ und die Wunderformel für das Vektorpotential ermitteln: $\vec{A}(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$. Strom I nach oben durch ∞ langen geraden dünnen Draht auf der z -Achse: zum Warmwerden ermitteln wir $\vec{B}$ mal schnell mittels integraler 4. Maxwell-Gleichung.

- (b) Aber auch die integrale $\vec{A}$ -Wunderformel muß zum $\vec{B}$ -Resultat von (a) führen !
(c) Der Strom I fließe entlang irgendeiner Kurve $\mathcal{C}$. Wie wird (es genügen Worte!) das dreifach-integrale $\vec{A}$ zu welchem Kurvenintegral ?
Füttert man dieses in $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, so entsteht alsbald $\vec{B} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{\mathcal{C}} d\vec{r}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$
Nicht wahr ?! Sie waren soeben so schlau wie Biot und Savart !

- (d) $\text{div } \vec{B} = 0 \leadsto \exists \vec{A}$ hatte

Theorem [2] behauptet. Was

sich sogar aufschreiben läßt, das existiert: $\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\vec{r}}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(\vec{r} \cdot \nabla)} \vec{B}(\vec{r})$ (*)

Wir kontrollieren (*) zuerst am Spezialfall $\vec{B} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ($\vec{\omega}$ ist konstanter Vektor). Laut Vorlesung und [P 21] sollte (*) (bis auf eventuelles Gradientenfeld) auf $\vec{A} = -\frac{1}{3}\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ führen. Ist es so ?

$\frac{1}{2}(\vec{r} \cdot \nabla)$ ist ein skalarer Operator. Schauen Sie doch als erstes nach, was er angewandt auf $\vec{\omega} \times \vec{r}$ liefert. Ansonsten wissen wir, egal ob als „Diffusioniker“ oder als „Quantenmechaniker“, daß $f(H)\psi = f(E)\psi$ ist, sofern $H\psi = E\psi$ gilt. Im vorliegenden Falle ist ersichtlich $f(x) = 1/(1+x)$.

- (e) Auch ganz allgemein läßt sich (*) bestätigen, indem man zeigt, daß $\nabla \times (*)$ (unter Ausnutzung von $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ natürlich) auf $\vec{B}$ führt.

Dabei kann die Operatoridentität $\nabla \frac{1}{2+\vec{r} \cdot \nabla} = \frac{1}{3+\vec{r} \cdot \nabla} \nabla$ von Nutzen sein, welche natürlich zu beweisen wäre. Wie war das noch ? (z.B. bei $\nabla' = D\nabla$) — Man erwecke zum Leben !

.5 + 2 + 1.5 + 1 + 2 =

7

63) Gaußscher Satz für Quader

Wenn das Volumen V ein Quader mit Kanten a, b, c ist, das Feld aber beliebig bleibt, welche Rechnung führt dann direkt von Gaußens linker Seite zur rechten ?

1

Oh, im verdammten PB-Buch steht ja zu 19/2 (a) auch die Lösung: $\vec{j} = \vec{r} 3Nv/(4\pi R(t)^4)$. Naja, wird schon falsch sein.