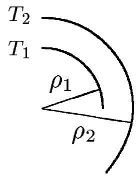
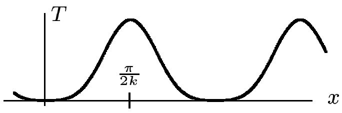
64) $\boldsymbol{(\,\partial_t - D\,\Delta\,)\,T = 0}$



(a) Auch die Diffusionsgleichung hat ihre *Statik*: $\dot{T} = 0$. Die Welt sei von einem wärmeleitenden homogenen Medium erfüllt: D bekannt.

Auf einem ∞–langen Zylindermantel (ρ_1) wird die Temperatur ständig auf T_1 gehalten, und auf einem zweiten (ρ_2) auf T_2.
Im Zwischenraum bildet sich ein zeitunabhängiges Profil aus: $T(\rho) = ?$

(b) Anfangswertproblem. Im ganzen (Medium–erfüllten) Raum herrscht zur Zeit $t = 0$ die Temperatur $T(\vec{r}, 0) = 8\,T_1 \sin^4(kx)$ ($T_1,\ k > 0$ bekannt). $T(\vec{r}, t) = ?$



Einer von drei Termen wird im Laufe der Zeit besonders rasch kleiner. Nach seiner Vernachlässigung läßt sich T über x im Intervall $(\,0,\ \frac{\pi}{2k}\,)$ gut skizzieren. Tun!

(c) *Separations–Ansatz*. Die Diffusionsgleichung kann auch ganz anders g e f r a g t werden, z.B. ob es *formstabile* kugelsymmetrische Lösungen gibt, d.h. solche von der Form $T = T_0 + f(t)\,g(r)$. In der Diffusionsgleichung lassen sich daraufhin die Variablen trennen, und man sieht sich gezwungen, $(rg)'' = \pm\kappa^2\,(rg)$ zu setzen. $g(0)$ sei endlich. Welche formstabilen Lösungen $T(r,t)$ ergeben sich, und zwar für das eine und für das andere Vorzeichen ? Skizze von T über r in beiden Fällen !

(d) Keine Angst vor Schrödinger. In $i\hbar\dot{\vec{\psi}} = H\vec{\psi}$ sei H eine reelle symmetr. Matrix mit Eigenwerten E. Formstabile Lösungen $\vec{\psi} = f(t)\,\vec{g}$ werden gesucht.

$1.5 + 2 + 2 + .5 =$ 6

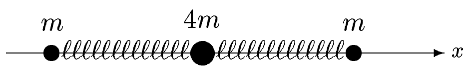
65) $\boldsymbol{(\,\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\,)\,n = 0}$ (c = Schallgeschwindigkeit)

(a) Nach einer Explosion bei $x = 0$ in einem langen geraden U–Bahn–Tunnel (x–Achse) mögen zur Zeit $t = 0$ folgende Verhältnisse für die Luft–Teilchendichte vorliegen: $n(x,0) = n_0 + n_1 \cdot e^{-\alpha x^2}$, $\dot{n}(x,0) = 0$. Wie es nun weitergeht, erzählt $n(x,t) = ?$

(b) Der Separationsansatz $n = n_0 + f(t)\,g(r)$ soll zu einer stehenden Kugel–Schallwelle der Frequenz ω führen. !?

$1 + 1 =$ 2

66) A–B–A–Molekül



Wir bleiben bescheiden eindimensional und lassen die skizzierten drei Atomkerne ($m_1 = m,\ m_2 = 4m,\ m_3 = m$) sich nur auf der x–Achse bewegen. Sie seien auch nur zweifach „verfedert“ (je $\kappa,\ \ell$) — eine dritte Feder wäre möglich, welche m_1 mit m_3 verbindet. Als Gleichgewichtslage sehen wir $(\,x_1,\ x_2,\ x_3\,) = (\,0,\ \ell,\ 2\ell\,)$ an.

Wie hängt das Gesamtpotential V des Systems von x_1, x_2, x_3 ab ? Und wie von den Auslenkungen η_1, η_2, η_3 aus der Gleichgewichtslage ? Mit welcher symmetrischen Matrix Ω bekommt das Potential die Gestalt $V = \frac{\kappa}{2}\,\vec{\eta}\,\Omega\,\vec{\eta}$? ($\kappa\Omega$ ist die „Kappa-matrix“ der Vorlesung) Wir setzen $\frac{1}{\sqrt{M}}\Omega\frac{1}{\sqrt{M}} =: \frac{1}{2m}H$ mit $H = ?$ Eigenwerte λ_j ($\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$) von H und zugehörige normierte Eigenvektoren $\vec{f}_j$? Wie sieht die mit H formulierte Bewegungsgleichung aus und mit welchen drei Frequenzen ω_j schwingt folglich das Molekül ?
Nun wäre ja eigentlich vollständig zu den Auslenkungen $\vec{\eta}$ zurückzukehren. Der Einfachheit halber nehmen wir an, die beiden höheren Frequenzen seien n i c h t angeregt. Welche allgemeine Lösung $\vec{\eta}(t)$ bleibt dann übrig ?

4