73) Fourier liefert Summen

(a) Zum periodischen Zelt (Ü. 72 zu $h\!=\!1$) hatte sich die Fourier–Reihe $\mathrm{ch}\Big(\frac{2\alpha}{L}x-\alpha\Big)_{\substack{\text{in }(0,L)\\ \text{per. sonst}}} = \sum_n \frac{\alpha\,\mathrm{sh}(\alpha)}{\alpha^2+n^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{in\frac{2\pi}{L}x}$ ergeben. Nehmen wir diese Identität an zwei bestimmten Stellen x und wählen α geeignet, so erhalten wir flugs je das Resultat für die beiden Summen

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{c^2+n^2} = \,? \quad \text{und} \quad \sum_n \frac{1}{c^2+n^2} = \,? \qquad \text{Daß} \quad \sum_n \frac{2\,x}{(2\pi n)^2-x^2} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)-1}$$

gilt, läßt sich aus der zweiten Summe herausmelken — nämlich wie ? ($c \to ?$)

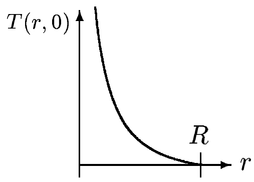
Solche Summen findet man nur schwer. Schreiben Sie sich doch alle drei hinten in den Brostein und fügen Sie auch noch $\sum_n 2\,x \,/\, \big[\,(2\pi n+y)^2 - x^2\,\big] \;=\; \sin(x)\,/\,[\,\cos(x)-\cos(y)\,]$ hinzu (schwieriger zu „melken“ – nicht im 2. Semester), weil nützlich bei Energie–Bänder–Herleitung in 1D (Dirac–Kamm).

(b) und Integrale. Welche Fourier–Transformierte $\widetilde{f}(k)$ hat $f(x) = e^{-\gamma|x|}$ $(\gamma > 0)$? Aus dem Resultat ($f(x) = \int \ldots$) lesen wir ab, daß $\displaystyle\int dk\,\frac{\cos(kx)}{\gamma^2+k^2} = \,?$

$2+1=$ 3

74) Heißes Zentrum eines Sterns

Ein erkalteter Stern ($\approx$ homogenes, ∞ ausgedehntes Medium bei Temeperatur Null) hat in seinem Inneren eine verspätete Reaktion erlebt, so daß zur Zeit $t=0$ die kugelsymmetrische Verteilung $T(r,0) = T_0\,R\,f(r)$ mit $f(r) = \big(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\big)\;\theta(R-r)$ vorliegt.



(a) Welche Fourier–Transformierte $\widetilde{f}(\vec{k})$ hat $f(r)$? (Nur zur Kontrolle: Bei $R\to\infty$ wird $f(r)$ zu $1/r$, ergo $\widetilde{f}(\vec{k})$ zu $4\pi/k^2$. Falls letzteres noch nicht in Vorlesung, dann jedenfalls bald.)

(b) Welcher Vorfaktor $\lambda(R)$ macht $\lambda(R)\,f(r)$ bei $R\to 0$ zu einer räumlichen Delta–Funktion ? Und wogegen (vorführen!) geht $\lambda(R)\widetilde{f}(\vec{k})$ bei $R\to 0$?

(c) der „Aufstieg in die Oberwelt“ beschert uns die Entwicklung von $f(r)$ nach Funktionen $\sin(kr)/r$ — nämlich in Form von welchem gewöhnlichen k–Integral ?

(d) Das (c)–Resultat erlaubt uns, die Zukunft $T(r,t) = \,?$ aufzuschreiben.

(e) Wir vermuten, daß die T–Spitze am Ursprung rasch abschmilzt. Um dies explizit zu machen, bilden wir $T(0,t)$. Einer von zwei Termen des Integranden kann bei $t\to 0$ nicht der dominante sein (in Worten: warum ?!). Lassen wir ihn weg, so

(f) erhalten wir den asymptotisch führenden Kurzzeit–Term von $T(0,t)$.
(„ – endlich kein Integral mehr ! “)

$2+1+1+.5+1+.5=$ 6

75) Wunderformel aus der Fourier–Unterwelt

Zur Magnetostatik hatten wir die Lösung $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ mit $\vec{A}$ siehe Ü. 62) (a) nur verifiziert. Jetzt leiten wir sie her. In der Fourier–Unterwelt sind die magnetostatischen Maxwell–Gleichungen (gleich hinschreiben!) rein vektoriell und lassen sich nach $\widetilde{\vec{B}}(\vec{k})$ auflösen. Dabei gelte $\widetilde{\vec{j}}(\vec{k})$ zunächst als gegeben, muß aber später noch durch die (allgemein zu haltende) Stromdichte $\vec{j}\,(\vec{r})$ ausgedrückt werden.
Mit Ziel vor Augen wird der Aufstieg in die Oberwelt doch wohl zu schaffen sein ! 3

Viel Glück auch beim Aufstieg in die höheren Semester ! Aber am Freitag gibt es noch ein $\boxed{\text{P 25}}$–Blatt.