73) Fourier liefert Summen

(a) Zum periodischen Zelt (Ü. 72 zu $h = 1$) hatte sich die Fourier–Reihe
$$\operatorname{ch}\Big(\frac{2\alpha}{L}x - \alpha\Big)_{\substack{\text{in } (0,L) \\ \text{per. sonst}}} = \sum_n \frac{\alpha\,\operatorname{sh}(\alpha)}{\alpha^2 + n^2\pi^2}\, \mathrm{e}^{in\frac{2\pi}{L}x}$$
ergeben. Nehmen wir diese Identität an zwei bestimmten Stellen x und wählen α geeignet, so erhalten wir flugs je das Resultat für die beiden Summen
$$\sum_n \frac{(-1)^n}{c^2+n^2} = ? \quad \text{und} \quad \sum_n \frac{1}{c^2+n^2} = ? \qquad \text{Daß} \quad \sum_n \frac{2\,x}{(2\pi n)^2 - x^2} = \frac{\sin(x)}{\cos(x) - 1}$$
gilt, läßt sich aus der zweiten Summe herausmelken — nämlich wie ? ($c \to ?$)

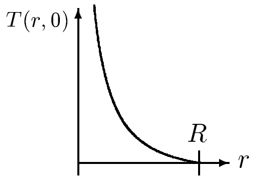
Solche Summen findet man nur schwer. Schreiben Sie sich doch alle drei hinten in den Brostein und fügen Sie auch noch $\sum_n 2\,x \,/\, \big[\,(2\pi n + y)^2 - x^2\,\big] \;=\; \sin(x) \,/\, \big[\,\cos(x) - \cos(y)\,\big]$ hinzu (schwieriger zu „melken“ – nicht im 2. Semester), weil nützlich bei Enerige–Bänder–Herleitung in 1D (Dirac–Kamm).

(b) und Integrale. Welche Fourier–Transformierte $\widetilde{f}(k)$ hat $f(x) = e^{-\gamma|x|}$ $(\gamma > 0)$?
Aus dem Resultat ($f(x) = \int \ldots$) lesen wir ab, daß $\displaystyle\int dk\, \frac{\cos(kx)}{\gamma^2 + k^2} = ?$

$2+1 =$ 3

74) Heißes Zentrum eines Sterns

Ein erkalteter Stern ($\approx$ homogenes, ∞ ausgedehntes Medium bei Temeperatur Null) hat in seinem Inneren eine verspätete Reaktion erlebt, so daß zur Zeit $t = 0$ die kugelsymmetrische Verteilung $T(r,0) = T_0\, R\, f(r)$ mit $f(r) = \big(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\big)\,\theta(R - r)$ vorliegt.



(a) Welche Fourier–Transformierte $\widetilde{f}(\vec{k})$ hat $f(r)$? (Nur zur Kontrolle: Bei $R \to \infty$ wird $f(r)$ zu $1/r$, ergo $\widetilde{f}(\vec{k})$ zu $4\pi/k^2$. Falls letzteres noch nicht in Vorlesung, dann jedenfalls bald.)

(b) Welcher Vorfaktor $\lambda(R)$ macht $\lambda(R)\, f(r)$ bei $R \to 0$ zu einer räumlichen Delta–Funktion ? Und wogegen (vorführen!) geht $\lambda(R)\widetilde{f}(\vec{k})$ bei $R \to 0$?

(c) der „Aufstieg in die Oberwelt“ beschert uns die Entwicklung von $f(r)$ nach Funktionen $\sin(kr)/r$ — nämlich in Form von welchem gewöhnlichen k–Integral ?

(d) Das (c)–Resultat erlaubt uns, die Zukunft $T(r,t) = ?$ aufzuschreiben.

(e) Wir vermuten, daß die T–Spitze am Ursprung rasch abschmilzt. Um dies explizit zu machen, bilden wir $T(0,t)$. Einer von zwei Termen des Integranden kann bei $t \to 0$ nicht der dominante sein (in Worten: warum ?!). Lassen wir ihn weg, so

(f) erhalten wir den asymptotisch führenden Kurzzeit–Term von $T(0,t)$.
(„ – endlich kein Integral mehr ! “)

$2+1+1+.5+1+.5 =$ 6

75) Wunderformel aus der Fourier–Unterwelt

Zur Magnetostatik hatten wir die Lösung $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ mit $\vec{A}$ siehe Ü. 62) (a) nur verifiziert. Jetzt leiten wir sie her. In der Fourier–Unterwelt sind die magnetostatischen Maxwell–Gleichungen (gleich hinschreiben!) rein vektoriell und lassen sich nach $\widetilde{\vec{B}}(\vec{k})$ auflösen. Dabei gelte $\widetilde{\vec{j}}(\vec{k})$ zunächst als gegeben, muß aber später noch durch die (allgemein zu haltende) Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ ausgedrückt werden.
Mit Ziel vor Augen wird der Aufstieg in die Oberwelt doch wohl zu schaffen sein ! 3

Viel Glück auch beim Aufstieg in die höheren Semester ! Aber am Freitag gibt es noch ein $\boxed{\text{P 25}}$–Blatt.