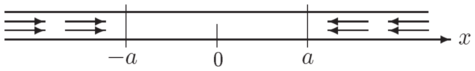
PRÄSENZÜBUNG 20

1) Über seinen ∞ langen Graben (stehendes Wasserreservoir) ist ein Bauer sehr unglücklich. In $-a < x < a$ versickern

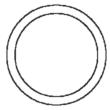


ihm nämlich $\Gamma = \frac{H_2O\text{–Moleküle}}{\text{Zeit und Fläche}}$. Zuerst wollen mehr Pfeile in die Skizze. Wenn div $\overrightarrow{\text{wovon}} = -\Gamma$ ist, welche Dimension hat dann $\overrightarrow{\text{wovon}}$? Aha. Nur im Innenraum: Ansatz, Dgl, Konstante = ? Was eine *Anschlußbedingung* ist, zeigt sich jetzt, wenn wir $\overrightarrow{\text{wovon}}$ auch zu $x > a$ angeben wollen.

2) Wenn die yz–Ebene homogen geladen ist (Ladung Q auf jedem Flächenausschnitt F), welche Ladungsdichte $\rho(\vec r)$ liegt dann vor ? Aus div $\vec E = \rho/\varepsilon_0$ ermitteln wir das zugehörige Feld $\vec E$ der Platte leicht mittels Ansatz, Aufleiten und Konstante–Festlegen.

3) Wird jetzt der Platte eine entgegengesetzt geladene im Abstand d gegenüber gestellt, dann erfüllt den Zwischenraum das Feld $\vec E = ?$ und hat Potential $\phi_{\text{innen}} = ?$ Zwischen den Platten herrscht Spannung $U = ?$ und folglich hat ein Plattenkondensator (F, d) die Kapazität $C = ?$

4) Kapazität eines Kugelkondensators $(R, R+d)$. Wir wissen schon alles. Zunächst nur die innere, mit Q geladene Kugel (R): $\vec E_{\text{außen}} = ?$ $\phi_{\text{außen}} = ?$ Jetzt zweite Kugeloberfläche hinzu: $U = ?$ Kapazität $C = ?$ $d \to 0$: $C \to ?$



5) Auch zur Einbettung $\chi = \frac{1}{r}\left(1 - e^{-r/\varepsilon}\right)$ sollte $\frac{-1}{4\pi}\Delta$ eine $\delta(\vec r)$–Darstellung liefern !?

6) Die Herleitung der Conti in 1D — wie ging das ?

7) Sie dürfen vorangehen bei der Entdeckung einer ersten wichtigen Eigenschaft der Maxwell–Gleichungen:

$$\nabla\cdot\vec E = \rho \quad (1) \qquad \nabla\cdot\vec B = 0 \quad (3)$$
$$\nabla\times\vec E = -\dot{\vec B} \quad (2) \qquad \nabla\times\vec B = \vec\jmath + \dot{\vec E} \quad (4)$$

Be–operiere (4) so, daß $\vec B$ herausfällt. Eliminiere mittels (1) auch $\vec E$. Verrückt, was nun dasteht !

War $\boxed{\text{P18}}$, 2) wirklich am Ende ? „Erhaltungssatz der Schwierigkeit" und Geruchssinn legen nahe, daß es irgendwie weitergeht. Tut es ja auch. Was war da los gewesen: h.Oszi $\ddot x + 2\gamma\dot x + \gamma^2 x = 0$ ($\gamma = \omega_0$–Fall) per Reduktion der Ordnung, d.h. $\dot x = v(x)$, gab $v'v + 2\gamma v + \gamma^2 x = 0$. Kamke's Rat $v(x) := x\,u(x)$ überführte dies in $\frac{u}{(u+\gamma)^2}u' = -\frac{1}{x}$ $\curvearrowright$ $\ln(u+\gamma) + \frac{\gamma}{u+\gamma} = C - \ln(x)$ — nicht auflösbar nach $u(x)$. Oh.

Na und ? Wie würde es denn weitergehen, wenn $u(x)$ bekannt w ä r e ?! Dann hätten wir uns zu erinnern, daß $\dot x = v = xu$ gesetzt war und folglich noch die Dgl $\frac{\dot x}{x} = u(x)$ zu lösen ist. Mit $x(t) = e^{\xi(t)}$ wird daraus $\dot\xi = u(x = e^\xi) = w(\xi = \ln(x))$. Was nun ? Trennung der Variablen: $\frac{1}{w(\xi)}\dot\xi = 1$. Hierfür ist $\frac{1}{w(\xi)} = \partial_\xi\,[\quad ? \quad]$ erforderlich, und dabei sollte der obige (nicht auflösbare) u–x–Zusammenhang irgendwie helfen. Wir schreiben ihn zuerst auf $w(\xi)$ um: $\ln(w+\gamma) + \frac{\gamma}{w+\gamma} = C - \xi$. Ableiten nach ξ gibt $\left(\frac{1}{w+\gamma} - \frac{\gamma}{(w+\gamma)^2}\right)\partial_\xi w = -1$, d.h. $\partial_\xi w = -\frac{(w+\gamma)^2}{w}$. Und jetzt hilft das Glück beim Raten von $[\quad ? \quad]$:

$\partial_\xi \frac{1}{w+\gamma} = \frac{-1}{(w+\gamma)^2}\,w'^\xi = \frac{1}{(w+\gamma)^2}\cdot\frac{(w+\gamma)^2}{w} = \frac{1}{w}$! Das löst die ξ–Dgl: $\left[\frac{1}{w+\gamma}\right]'^\xi \dot\xi = \left[\frac{1}{w+\gamma}\right]^\bullet = 1 = (\alpha+t)^\bullet$ $\curvearrowright$ $w(\xi(t)) + \gamma = \frac{1}{\alpha+t}$. Wegen $w(\xi(t)) = u(x(t))$ kennen wir auch u, und zwar bereits als Funktion von t: $u + \gamma = \frac{1}{\alpha+t}$. Hinein damit in den „unauflösbaren" Zusammenhang mit $x(t)$: $C - \ln(x) = -\ln(\alpha+t) + \gamma(\alpha+t)$, $\ln(x) = C + \ln(\alpha+t) - \gamma(\alpha+t)$, $x(t) = e^C e^{-\gamma\alpha} e^{-\gamma t}(\alpha+t) \;= e^{-\gamma t}(A+Bt)$ — und HURRA ! denn genau darauf sollte ja auch der obige krumme Weg führen.

Die Moral von der Geschicht, wirf so schnell das Handtuch nicht.