Stimmt all dies ?

$$\vec{a}^{\,2} := \vec{a}\cdot\vec{a} = a^2 \quad , \quad |\vec{a}| = a = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} \quad , \quad \vec{a}\perp\vec{b} \hookrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

$$\vec{a}\parallel\vec{b} \hookrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = ab \quad , \quad |\vec{a}+\vec{b}\,| \le a+b \quad , \quad |\vec{a}\cdot\vec{b}\,| \le ab \ \text{(Schwarz)}$$

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right) \quad , \quad \vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$r_{12} = r_{21} = |\vec{r}_1-\vec{r}_2| = \sqrt{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)^2} = \sqrt{r_1^2+r_2^2-2\,\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2}$$

$$a_ja_j = a^2 \quad , \quad c_ka_ja_\ell b_k\delta_{j\ell} = a^2\left(\vec{c}\,\vec{b}\right) \quad , \quad \delta_{j\ell}\delta_{\ell k} = \delta_{jk}$$

$$\delta_{jj} = 3 \quad , \quad \delta_{j\ell}\delta_{\ell m}\delta_{mn}\delta_{nk} = \delta_{jk} \quad , \quad \delta_{j\ell}\delta_{\ell j}\delta_{mn}\delta_{nm} = 9$$

Index $\perp$:= der zum jeweils anderen Vektor senkrechte Anteil :

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b}_\perp = \vec{a}_\perp\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} \quad , \quad \vec{a}\times\vec{a} = \vec{0} \quad , \quad \vec{a}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = 0$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}\,| = ab_\perp = a_\perp b \quad , \quad \pm\vec{a}\parallel\vec{b} \hookrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0 \quad , \quad \vec{a}\perp\vec{b} \hookrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}\,| = ab$$

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right) \quad , \quad \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) \ne \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c} \quad , \quad \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)$$

$$\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c} = \vec{c}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = (\vec{c}\times\vec{a})\,\vec{b} = \vec{b}\,(\vec{c}\times\vec{a}) = \ldots$$

Hauptachsentransformation : der „Fahrplan"

I. Ist $H = H^T$ erfüllt ? Bei 3×3–Matrizen, zugegeben, sieht man dies sofort, aber bei $\infty\times\infty$ schon weniger. Falls H komplex ist (i enthält), ist nach $H = H^\dagger$ zu fragen, wobei $\dagger := *T = T*$. Wieso dies ? Es sind genau diese „hermiteschen" Operatoren, deren a l l e Eigenwerte reell sind: $\lambda\,\vec{f}^{\,*}\,\vec{f} = \vec{f}^{\,*}H\,\vec{f} = \left(H^T\,\vec{f}^{\,*}\right)\vec{f} = \left(H^\dagger\,\vec{f}\right)^*\vec{f} = \lambda^*\,\vec{f}^{\,*}\,\vec{f}$. Wer verlangt reelle λ? Der Quantiker: Eigenwerte sind die möglichen Meßwerte der Observablen H. Und aus solchen hat sich das i–Gespenst gefälligst fern zu halten.

II. Löse $\det(H-\lambda\cdot 1) = 0$. Dabei wird klar, ob zwei oder mehr λ's zusammenfallen. Mit Blick auf Quantenmechanik (Grundzustands–Energie zuerst) sortiere man von unten nach oben: $\lambda_1\le\lambda_2\le\lambda_3\le\ldots$.

III. Spur–Probe. Ist $\mathrm{Sp}(H) = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$?! (Übrigens muß auch $\det(H) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ gelten.)

IV. Löse $(H-\lambda\cdot 1)\,\vec{f} = \vec{0}$. Dies ist separat für jeden Eigenwert zu tun. Somit ist klar, zu w e l c h e m Eigenwert w e l c h e r $\vec{f}$–Vektor gehört. Da es sich um drei linear **ab**hängige Gleichungen handelt, darf jeweils eine nicht–verschwindende $\vec{f}$–Komponente frei gewählt werden. Das Resultat ist ein dreifaches: $\vec{f}_1 \sim \begin{pmatrix}\cdots\\\cdots\\\cdots\end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = \ldots$ bis $\vec{f}_3 \sim \begin{pmatrix}\cdots\\\cdots\\\cdots\end{pmatrix}$ zu $\lambda_3 = \ldots$. Normierung erst unter Pkt. VI (darum das $\sim$ Zeichen).

V. Orthogonalitäts–Probe. Ob paarweise alle Skalarprodukte $\vec{f}_j\cdot\vec{f}_k$ verschwinden ($j\ne k$), läßt sich noch vor Normierung kontrollieren. Im Falle von Entartung ist für Orthogonalität im entsprechenden Entartungsunterraum zu s o r g e n .

VI. Normierung, Rechtssystem. Über Rechtssystem (3×3–Fall) kann eine Skizze entscheiden, oder das Spatprodukt. Ggf. ist das Vorzeichen an einem der $\vec{f}$ umzukehren. Übrigens konnte $\vec{f}_3$ auch per $\vec{f}_1\times\vec{f}_2$ erhalten werden.

VII. Resultat. Was nun insgesamt gewonnen ist, verdient notiert zu werden in der Form

$$H' = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} — & \vec{f}_1 & — \\ — & \vec{f}_2 & — \\ — & \vec{f}_3 & — \end{pmatrix} .$$
