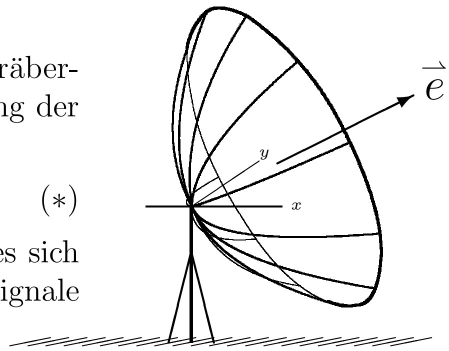
28) Lissajous (Jules Antoine Lissajous 1822 – 1880)

(a) Zur 3D Potentialmulde der Übung 26 hatte sich der symmetrische Kappa–Tensor $\mathbb{K} = \kappa\,\mathbb{A}$ mit $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ ergeben. Wir unterwerfen $\mathbb{A}$ zunächst dem vollen Programm der Hauptachsen–Transformation. Jede (bitte römisch numerierte) „Station“ des Fahrplans werde bedient (ggf. mit einem „OK“).

(b) Newton diktiert der Punktmasse m, daß sie $\boxed{\ddot{\vec{r}} = -\omega^2\,\mathbb{A}\,\vec{r}\ ,\ \dot{\vec{r}}(0) = \vec{0}\ ,\ \vec{r}(0) = \tfrac{2}{3}R\,(\,4\,,1\,,-1\,)}$ zu befolgen hat, wenn sie wie angegeben ausgelenkt und dann losgelassen wurde ($\omega^2 := \kappa/m$). Welche Gestalt nimmt dieser ER im Hauptachsen–System an, d.h. wie sieht der ER für $\vec{r}\,'(t)$ aus? Komponentenweise gelesen, sind das drei ER's — mit je welcher Lösung? Wie dürfte die (in der x'–y'–Ebene liegende) Bahnkurve qualitativ aussehen? (Es ist eine sehr spezielle Lissajous–Figur.) $3.5 + 2.5 =$ 6

29) Salatschüssel



Unter einem ausgedienten Radioteleskop sind Schräbergärten entstanden. Ein Laubenpieper hat die Gleichung der Schale ermittelt:

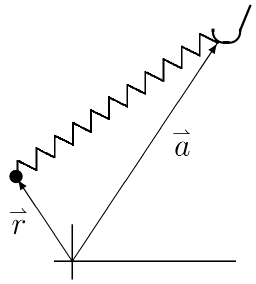
$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 8xy - 4xz - 4yz = b\,(2x + 2y + z) \qquad (*)$$

Er will nun von uns wissen, um was für eine Fläche es sich wohl handle und aus welcher Richtung $\vec{e}$ die letzten Signale empfangen wurden.

(a) Wir erkennen, daß $(*)$ die Struktur $\vec{r}\,H\,\vec{r} = \vec{a}\,\vec{r}$ hat, notieren die symmetrische Matrix H, den Vektor $\vec{a}$ und gehen nun zu H den Hauptachsen–Fahrplan durch.

(b) Wie sieht $(*)$ im Hauptachsensystem aus? Was für ein „ ...–oid“ ist es also ?
Wie lautet unsere Antwort $\vec{e}\ = ?$ an den Kleingärtner?
Alle Randpunkte der Schüssel mögen auf der Ebene $\vec{e}\,\vec{r} = c$ liegen.
Wenn $b = 300\,\mathrm{m}$ und $c = 4\,\mathrm{m}$, wie weit sind dann die Randpunkte von der Symmetrieachse $\vec{e}$ entfernt ? $3 + 2 =$ 5

30) Linearisierung



Eine bei $\vec{a}$ befestigte Feder (κ, ℓ) zieht an einem Massenpunkt, der sich — aus welchen Gründen auch immer — nur wenig vom Ursprung entfernen kann: $r \ll a$. Der asymptotisch führende Term $\kappa\,\vec{e}_a\,(a-\ell)$ der Kraft ist uns wohlbekannt. Aber welche Korrekturen mag sie linear in $\vec{r}$ erfahren, d.h.

$$\tfrac{1}{\kappa}\,\vec{K}(\vec{r}) = \vec{e}_a\,(a-\ell) \quad + \quad \ldots ? \ldots \quad + \quad \mathcal{O}(r^2)\ .$$

1

Der Weisheit $(1+\varepsilon)^\lambda = 1 + \lambda\,\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ hat bereits der Herr Nikolaus nichts anhaben können, nicht wahr, und so wird sie auch noch das Jahr 3005 erleben.

Ehe etwa eine(r) diesen Einpunkter in den *challenge*–Bereich abdrängt, sei noch Dreierlei festgezurrt: es ist ersichtlich $\vec{a} - \ell\,\vec{e}_a = \vec{e}_a\,(a-\ell)$, ferner $X^2 + \text{klein} = X^2\,\left(1 + \text{klein}/X^2\right) = X^2\,(1 + \text{selber klein})$ und schließlich $(X + \text{klein}) \cdot (Y + \text{glein}) = XY + Y\,\text{klein} + X\,\text{glein} + \mathcal{O}\left(\text{klein}^2\right)$.