31 ) e hoch

(a) Ein Ozeandampfer ($m$), bei $x(0) = 0$ mit $\dot{x}(0) = 0$ startend, erfährt konstante Schubkraft $m\,k$ und Wasser–Reibungskraft $-m\,\alpha\,v$ . 1D Problem. $v$–ER, Resultat für $v$ und $x(t)$ durch Aufleiten. Mit welcher $t$–Potenz startet das Gefährt ?

(b) Die Anzahl $N(t)$ der Elefanten eines Nationalparks verändere sich gemäß $\boxed{\dot{N} = \alpha\,N - \beta\,N^2 \ , \ N(0) = N_0}$ wobei $\alpha$, $\beta$ positive Konstante sind . $N(t) = ?$
Welche ferne Zukunft $N \to ?$ bei $t \to \infty$ hat die Bevölkerung ? $2+2 =$ 4

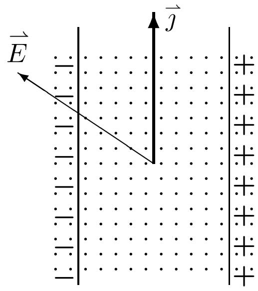
Die $N$–Dgl ensteht, wenn man in $\dot{N} = G \cdot N - S \cdot N$ die Sterberate $S = S_0$ konstant setzt, aber die Geburtenrate $G$ am Bestand z.B. von Futterpflanzen orientiert, welcher seinerseits linear mit der Anzahl der Tiere abnehme : $G = G_0 - \beta \cdot N$ , so daß $\alpha = G_0 - S_0$ . Es sind sehr vernünftige Tiere. Wir haben ein „Weltmodell” auf dem Papier, allerdings ein überaus optimistisches.

32 ) Hall–Effekt $\boxed{m\dot{\vec{v}} = -m\,\alpha\,\vec{v} + q\,\vec{E} + q\,\vec{v} \times \vec{B} \ , \ \vec{v}(0) = \vec{0}}$

ist Newtons Regieanweisung für ein Teilchen ($m$, $q$), das sich unter $v$–Reibung in gekreuzten homogenen Feldern $\vec{B} = (\,0\,,\,0\,,\,B\,)$ und $\vec{E} = (\,0\,,\,E\,,\,0\,)$ bewegt.

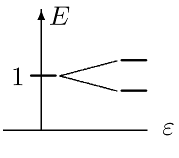
$\vec{v}(t) = ?$ Aufgrund der Reibung ist nach einiger Zeit der Startvorgang „vergessen“: das Teilchen erreicht die konstante Geschwindigkeit $\vec{v}_\infty := \lim\limits_{t\to\infty} \vec{v}(t) = ?$
Weil hübsch plausibel, sei $\vec{v}_\infty$ auch zu den Grenzfällen $B = 0$ bzw. $\alpha = 0$ notiert.

Die „ $\vec{u} + \vec{a}$ “–Idee funktioniert auch hier. Per $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ bestimmt sich der konstante Vektor. Abkürzungen $\omega := qB/m$ und $\eta := qE/\left(m\,[\alpha^2 + \omega^2]\right)$ . Welcher ER entsteht, wenn per $\vec{u} = e^{-\alpha t} \cdot \vec{w}$ zur neuen Funktion $\vec{w}(t)$ übergegangen wird ? Wegen der ungewohnten Anfangsbedingung macht nun auch das Lösen des $\vec{w}$–ER noch etwas Mühe — darum so viele Punkte.
Nicht in einer Nebelkammer befinden wir uns hier, sondern inmitten eines Halbleiters (mit „Löcherleitung“, falls $q > 0$ ). Weil die vielen Teilchen (je mit $\vec{v}_\infty$) der Geometrie folgen, lädt sich der Rand auf und das resultierende elektrische Feld steht „schief“.




6

33 ) Störung hebt Entartung auf



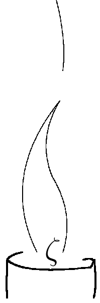

Jedes Quantensystem hat seinen Hamilton–Operator $H$ (manchmal tatsächlich nur Matrix). Stationäre Zustände $\vec{\psi}$ werden aus $H\vec{\psi} = E\vec{\psi}$ ermittelt, Energieniveaus $E$ liefernd. Der Eigenvektor $\vec{\psi}_0$ zum tiefsten $E$ ($=: E_0$) heißt Grundzustand. $\vec{\psi}$’s sind stets zu normieren.

Der bei $E_0 = 1$ (*any units*) liegende Grundzustand eines Systems mit $H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist ersichtlich zweifach entartet. Von zwei solchen Systemen erfahre das eine die Störung $V$ , das andere die Störung $W$ :

$$H = H_0 + V \ \text{ mit } \ V = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \widetilde{H} = H_0 + W \ \text{ mit } \ W = \begin{pmatrix} 3\,\varepsilon & 4\,\varepsilon \\ 4\,\varepsilon & -3\,\varepsilon \end{pmatrix} .$$

Welches Spektrum $E_0$ , $E_1$ und welche zugehörigen normierten Eigenzustände $\vec{\psi}_0$ , $\vec{\psi}_1$ hat $H$ — und welche $E$’s und $\vec{\psi}$’s hat $\widetilde{H}$ ? 2

Geht nun $\varepsilon$ nach Null, so wandern die Energie–Eigenwerte wieder zusammen, aber die $\vec{\psi}$–Zweibeine bleiben verschieden. Sie „wissen“ noch von der Störung, in der sie gelebt hatten. Störung schafft Ordnung im Entartungs–Unterraum.



*Wenn man es nur versucht, so geht’s.*
*Das heißt: manchmal, doch nicht stets.* (Wilhelm Busch)