

34) Kleine Schwingungen in 1D (Reihenanfang, um ein Problem vorab zu vereinfachen)

In jedem der folgenden vier Fälle schwingt eine Masse m um den Ursprung im Potential $V(x) = \kappa a^2 f(x/a)$. Nach Entwicklung von $f(s)$ bis mit s^2 (Taylor-Reihe verboten!) kann per $V(x) = \text{const} + \frac{1}{2} \kappa_{\text{eff}} x^2$ ein effektives Kappa abgelesen und folglich die Frequenz als $\omega = \sqrt{\kappa_{\text{eff}}/m}$ angegeben werden.

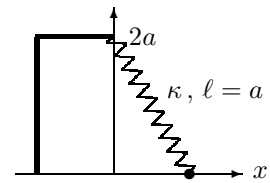
(a) $f(s) = \frac{1}{s^2} (\cos(s) - \cos[\text{sh}(s)])$ ($\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{3m}}$ — aber wie kommt dies heraus?)

(b) $f(s) = \frac{2 \text{ch}(s)}{2 - \text{ch}^2(s)} = \partial_s \ln \left(\frac{1 + \text{sh}(s)}{1 - \text{sh}(s)} \right)$

einmal via ch-Reihenanfang, zum anderen per Entwicklung des ln.

(c) $f(s) = -\frac{\ln[1 + \text{ch}(s)]}{\text{ch}(s)}$

(d) m kann sich nur auf der x -Achse bewegen. Eine in Höhe $2a$ befestigte Feder ($\kappa, \ell = a$) sorgt für rücktreibende Kraft. $f(s) = ?$ — Und erneut weiter bis $\omega = ?$



1 + 2 + 1 + 1 =

5

35) Fahrschüler (Reihe als Ansatz, um ein Dgl-Problem zu lösen)

Er hat die Handbremse nicht ganz gelöst, nimmt aber wie gewohnt exponentiell den Fuß vom Gaspedal. $x(t) = ?$

$$\ddot{x} = 2a\omega^2 e^{-x/a} - \frac{1}{a} \dot{x}^2, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(0) = 0$$

Wir setzen $x(t) = a (c_2 t^2 + c_4 t^4 + c_6 t^6 + \dots)$ an, haben damit die Anfangsbedingungen bereits erfüllt, bestimmen c_2, c_4 und c_6 aus der Dgl und haben einen Verdacht, von welcher Funktion $x(t)$ damit der Reihenanfang entstanden sein könnte. Natürlich sehen wir nun explizit nach, ob die Vermutung den x -ER tatsächlich erfüllt.

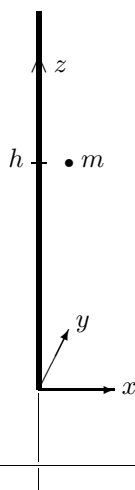
(Nur sehr selten kann auf diese Weise samt Reihen-Aufsummation eine Dgl gelöst werden. Hier gelingt es aufgrund ihrer speziellen Parameter und Anfangsbedingungen. So entstehen denn solche Aufgaben meist nach dem Motto „Es soll . . . herauskommen“.)

4

36) Gravitierender Stab (Reihenanfänge zur Resultat-Diskussion)

3005. Ein stabförmiger Himmelskörper wurde entdeckt. Er beginnt im Ursprung, ist $\approx \infty$ dünn und $\approx \infty$ lang, hat konstante lineare Massendichte σ ($:=$ Masse pro Höhenintervall) und zieht eine Probemasse m an, die sich irgendwo bei \vec{r} befindet. Bald werden wir in der Lage sein, das Potential $V(\vec{r})$ dieser Kraft auszurechnen:

$$V(\vec{r}) = \gamma m \sigma \ln \left(\sqrt{z^2 + \rho^2} - z \right) \quad \text{mit } \rho^2 := x^2 + y^2.$$



(a) Wenn sich m bei festem $z = h$ dem Stab nähert, sollte die Anziehungskraft nichts mehr vom „weit weg“ erscheinenden Stabende bemerken können. Wir ermitteln den bezüglich $\rho \rightarrow 0$ asymptotisch führenden V -Term und aus diesem die Kraft \vec{K} auf m . — Mit der gleichen ρ -Potenz ändert sich auch die Kraft auf eine Probeladung in der Nähe einer katzenfell-geriebenen Glasfaser. — Nähert sich m hingegen auf der z -Achse von unten her dem Stabende ($z = -\varepsilon$), so unterscheidet sich $V(\varepsilon)$ ein klein wenig vom obigen $V(\rho)$, nämlich wodurch?

(b) Wenn wir m auf einem zur x -Achse parallelen geraden Draht bei $z = -a$ reibungsfrei gleiten lassen, so vollführt sie dort kleine Schwingungen mit $\omega^2 = ?$ Dimensionsprobe! $1.5 + 1.5 =$

3