37) Störungsrechnung im Test

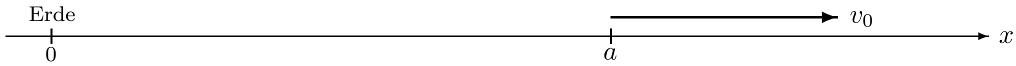
(a) Zum Fahrschüler–Problem Übung 35) hatten wir mit $x(t) = a\ln(1+\omega^2 t^2)$ die exakte Lösung erhalten. Mittels Störungsrechnung erster Ordnung in ω^2 sollte sich also $x(t) = a\,\omega^2 t^2$ ergeben. Wie geht es dabei zu?

(b) Auch zu $\boxed{\dot v = -\lambda\,(1+\omega t)\,v \ , \ \ v(0) = v_0}$ kennen wir mit $v = v_0\,e^{-\lambda t - \lambda\omega t^2/2}$ die exakte Lösung, nämlich aus TU 11 3). Worauf sollte also Störungsrechnung erster Ordnung in ω führen? Welchen ER erfüllt $v^{(0)}$? mit welcher Lösung? Der ER für $v^{(1)}$ sieht nur im ersten Moment böse aus. Welcher Dgl–Trick hilft hier weiter? Und wie führt er auf $v^{(1)} = \,?$ Schließlich notieren wir $v^{(0)} + v^{(1)}$ — und sind sehr zufrieden.

$1+2=$ 3

38) Tatzeit

In der Silvesternacht haben Bösewichter am DESY in Hamburg kurzzeitig den Teilchenstrahl nach oben gelenkt. Die Fluchtgeschwindigkeit ist weit überschritten, d.h. für alle x ist $E \gg V(x)$, oder auch: γ ist winzig. Später – die Erde ist längst $\approx$ punktförmig – wird ein solches Teilchen von einer Raumstation registriert, nämlich zur Zeit $t_1 = a/v_0$ bei $x(t_1) = a$ mit $\dot x(t_1) = v_0$. Um die Täter zu ergreifen, wird die Tatzeit t_0 benötigt.



Der ER für $x(t)$ enthält natürlich $\ddot x = -\gamma M/x^2$ als Dgl und die beiden Daten zur Zeit t_1. Welche drei ER's für $x^{(0)}$, $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ entstehen bei Störungsrechnung nach γ? Wir lösen die ersten beiden. Aus welcher Gleichung ist die Tatzeit zu ermitteln? Welche zwei (der vier) Terme in $x(t) = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t)$ kann man dabei vernachlässigen? Genug. Wer t_0 sogar explizit anzugeben vermag, verdient *challenge*–Zusatzpunkte.

5

39) Integral ist Fläche „Hauptsatz" verboten, denn elementare Umformungen und geometrisch–anschauliche Überlegungen reichen aus, um die Werte der folgenden acht Integrale zu ergründen:

$$J_1 = \int_0^4 dx\,\Big(5 - 3\,|x-2|\Big) \quad , \quad J_2 = \int_{-3}^4 dx\,\frac{2x - \sin^2(2x-1)}{\cos^2(2x-1)}$$

$$J_3 = \int_0^6 dx\,\left(\frac{1}{1+(x-4)^2} + \frac{(x-2)^2}{x^2-4x+5}\right) \quad , \quad J_4 = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{15\,\varepsilon} dx\,\frac{x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{\varepsilon\,x^3}$$

$$J_5 = \lim_{a\to\infty}\int_a^{a+2} dx\,\left(x\sqrt{4+x^2} - x^2\right) \ , \ J_6 = \int_0^3 dx\left[1 + \mathrm{Arsh}\Big(\frac{1}{x}\Big) + \ln\Big(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\Big)\right]$$

$$J_7 = -\beta\,\partial_\beta \ln\left(\int_0^\infty dx\,\frac{x}{e^{\beta x}+1}\right) \quad ,$$

$$J_8 = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\varepsilon dx\,\frac{2}{x\,\varepsilon^2}\left(\mathrm{ch}(2x) - \sqrt{1 + 2\sqrt{6\,x\,\mathrm{sh}(x) - 6x^2}}\right)$$

$.5 + .5 + .5 + .5 + .5 + .5 + .5 + .5 =$ 4

♣ Das Winter–Hausübungs–Programm endet hier. — Aber auch die Halbzeitpause geht vorüber, nämlich am <u>Montag</u>, dem 4. April, 11$^{\mathrm{ct}}$ Uhr im Bahlsen–Saal $\equiv$ F 303. ♣