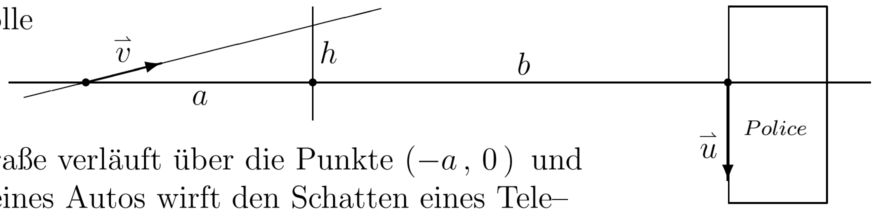
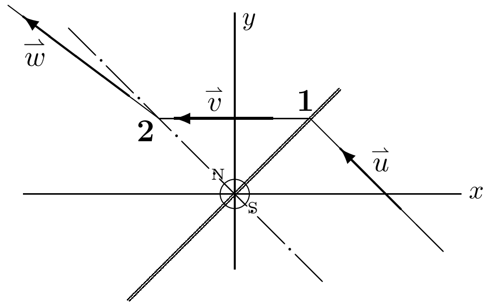
4) Geschwindigkeitskontrolle



Nacht. Eine gerade Landstraße verläuft über die Punkte $(-a\,,\,0)$ und $(0\,,\,h)$. Der Scheinwerfer eines Autos wirft den Schatten eines Tele–grafenmastes (= Ursprung) auf die Wand (∥ zur y–Achse) einer Polizeistation. In dem Moment, in dem der Raser die x–Achse passiert, wird an der Station bei $(b\,,\,0)$ die Schattengeschwindigkeit u registriert. Die Beamten bitten nun die Uni um eine handliche Formel (u, a, b, h enthaltend) für die Geschwindigkeit v des Sünders. 3

5) Zentralkraft und Drehimpuls



Das unglaubliche Zentralkraftfeld eines fernen Planeten (Mitte = Ursprung) ist fast überall Null. Nur nahe an der S–N–Achse stößt es stark ab, und in enger Umgebung der Äquatorebene zieht es an. Eine Raumsonde fliegt genau in der Ebene $z=0$ ein, und zwar parallel zur S–N–Achse (links–diagonal) und mit Geschwindigkeit u. Sie wird bei $\vec{r}_1 = (1,1,0)a/\sqrt{2}$ an der Äquatorebene abgelenkt und bei $\vec{r}_2 = (-1,1,0)a/\sqrt{2}$ durch das polare Bündel in Richtung $\vec{e}_w = (-4,3,0)/5$ in den Raum geschleudert — mit welcher Geschwindigkeit w ?

(a) Was bei Punkt 1 gilt („Es ist immer irgendwie Newton"), soll als Gleichheit zweier Skalarprodukte (mit welchem Einheitsvektor $\vec{e}$?) notiert werden. Weil $\vec{u} = (?,?)$ bekannt ist, folgt $\vec{v}$ und (nach gleichem Prinzip) schließlich w.

(b) Jemand behauptet, $\vec{\ell} := \vec{r} \times \vec{v}$ sei eine interessante Bildung (und $\vec{L} = m\vec{\ell}$ heiße *Drehimpuls*). Wir rechnen diesen Vektor vier mal aus, und zwar bei 1 unmittelbar vor Eintritt in die Kraftfeld–Schicht, dort unmittelbar nach Austritt, bei 2 vor und bei 2 nach. Wir bilden also $\vec{\ell}_{1v}$, $\vec{\ell}_{1n}$, $\vec{\ell}_{2v}$ und $\vec{\ell}_{2n}$ — und staunen.
(Es lag an der Zentralkraft, gilt für jede und heißt *Drehimpulserhaltung*.) $3+2=$ 5

6) Fünf *quickies* und eine *challenge*

(a) Eine ferne Zivilisation legt einen Vektor $\vec{a}$ durch Angabe der Abstände u, v, w zu den Achsen (statt zu den Ebenen) fest. u ist die Länge des Lotes vom $\vec{a}$–Endpunkt zur x–Achse usw. Wie drückt sich der Betrag a durch u, v, w aus ?

(b) Per Rechnung soll sich zeigen, daß die Mittelpunkte der Seiten eines beiliebigen Viereckes stets die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

(c) Prove that if the magnitudes of the sum and the difference of two vectors are equal, the vectors are perpendicular. — Prove that if the sum and the difference of two vectors are perpendicular, the vectors have equal magnitudes. [Alonso/Finn I, 3.13+14]

(d) Wird eine Komponente (Ihrer Wahl) der lhs. von $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b})$ ausführlich durch Komponenten ausgedrückt und (unabhängig davon) selbiges auch mit der rhs. getan, so ist die „bac–cab–Formel" *verifiziert*.

(e) Das Produkt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \Big[(\vec{a} \times \vec{c}) \times (\vec{b} \times \vec{c}) \Big]$ soll vereinfacht werden.

(f) Wie folgt der sphärische Kosinussatz aus Vektorrechnung? $1+.5+.5+.5+.5+1=$ 4