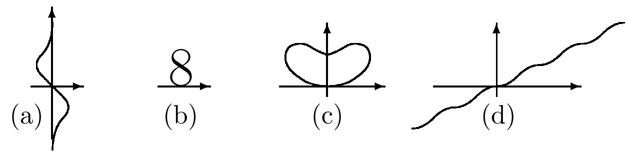
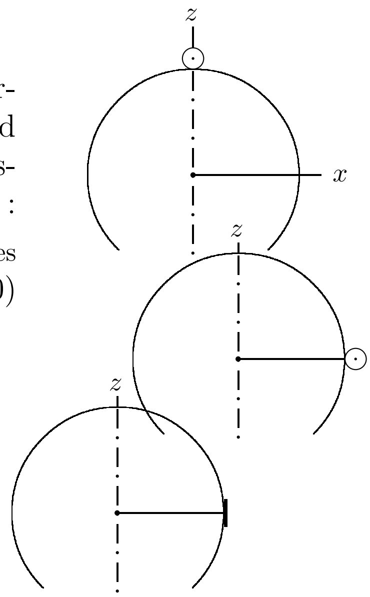
10) Für Erfinder



Möglichst einfache 2D Vektorfunktionen $\vec{r}\,(t)$ sollen notiert werden, so daß Bahnkurven der skizzierten Form entstehen. Zu jeder Figur soll der Parameter $\omega t =: \tau$ von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen können. ($\vec{r}$ hat Dimension Länge. — ⚡⚡⚡)

$.5 + .5 + 5 + .5 =$ 2

11) Riesenräder : $\vec{r}\,(t) = ?$



(a) Die Erde (R) dreht sich mit Ω um die z–Achse (Ursprung=Erdmitte). Am Nordpol steht ein Riesenrad (Radius ϱ, Winkelgeschwindigkeit ω). $\vec{r}\,(t)$ sei der Ortsvektor der Gondel, welche zur Zeit $t = 0$ unten ist : $\vec{r}\,(0) = (0, 0, R)$. Aus $\vec{r}\,(t)$ bilden wir auch $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ [dies aber nur zu Teil (a)] und sehen nach, ob die Beträge $v(0)$ und $v(\pi/\omega)$ gleich sind.

(b) Wie bei (a), aber das Riesenrad steht am Äquator. $\vec{r}\,(0) = (R, 0, 0)$.

(c) Wie bei (b), aber das Rad liegt flach, ist also ein ebenerdiges Karussell. $\vec{r}\,(0) = (R, 0, -\varrho)$.

Nie soll mangelnde Vorbereitung ins Unglück stürzen. Wir behandeln darum zu jeder dieser drei Situationen erst einmal eine Vorstufe (vs), in welcher die Erde ruht ($\Omega = 0$) : $\vec{r}_{\rm vs}(t) = ?$ Und dann hilft es vielleicht, vom Polarstern aus auf das Geschehen herab zu blicken, also seine Projektion auf die xy–Ebene zu betrachten (malen ?!!).
Abkürzungen : $s := \sin(\omega t)$, $c := \cos(\omega t)$, $S := \sin(\Omega t)$, $C := \cos(\Omega t)$.

$2.5 + 1 + 1.5 =$ 5

12) Ableiten = Differentialquotient bilden

(a) Bereits aufgrund gewisser Eigenschaften von $f(x)$ läßt sich $f'(x)$ ermitteln:
$f(\varepsilon) = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$, $f(x+y) = f(x)\sqrt{1+f^2(y)} + \sqrt{1+f^2(x)}\,f(y) \curvearrowright f'(x) = ?$
Wie $f(x)$ verläuft, werde nun grob qualitativ skizziert. Die Funktion f kennen wir ansonsten *nicht* — was heißt „kennen" eigentlich — später einmal bekommt sie einen Namen.

(b) $f(1+\varepsilon) = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, $f(x\,y) = f(x) + f(y)$ $(0 < x, y)$ $\curvearrowright$ $f'(x) = ?$ u. f–Skizze.

(c) Welche funktionale Beziehung [jetzt für $\sin(x) =: f(x)$ allein und für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$] wird zusammen mit welcher $f(\varepsilon)$–Angabe zur Sinus–Ableitung führen?
Was kommt auf diesem Wege heraus?

(d) Bei Übung 9) hatte sich der UFO–Ort $\vec{r}\,(t) = \frac{R\,(h - vt - \sqrt{-2hvt}\,)}{h^2 + v^2 t^2}\,(\,-\,vt\,,\,h\,)$ ergeben. Jetzt interessiert uns seine Geschwindigkeit $\vec{v} = (\,\dot{x}\,,\,\dot{y}\,)$ und zwar kurz bevor es bei $(0, R)$ entschwindet. Wie sich dort $\dot{x}$ bzw. $\dot{y}$ verhalten wird, ist uns anschaulich klar — nämlich (in Worten) wie? Bei der Berechnung von $\dot{x}$ und $\dot{y}$ dürfen Sie nun (im rechten Moment Ihrer Wahl) allerlei Terme weglassen, welche bei $t \to -0$ (relativ zu einem additiven Term) beliebig klein werden. Nur ein Term bleibt je schließlich übrig. Sie haben den *asymptotisch führenden Term* von $\dot{x}$ bzw. von $\dot{y}$ präpariert.

$1 + 1 + 1 + 2 =$ 5