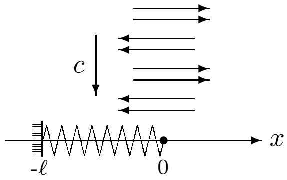
19 ) Resonanz




Ein geladenes Teilchen $(m,\, q)$ ist an einer Feder $(\kappa,\, \ell)$ befestigt und ruht am Ursprung. Ab Zeit $t = 0$ wird es von der aus Übung 14 bekannten Lichtwelle getroffen, d.h. der Kraft $K_1 = -mk\sin(\omega t)$ ausgesetzt. 1D Problem.

(a) Eindeutigkeitsrahmen, Ansatz und Lösung $x(t) = ?$

Mit $\sqrt{\kappa/m} =: \Omega$ und $\omega$ hat das Problem zwei Frequenzen. Also wird wohl der Ansatz zwei Sorten trigonometrischer Funktionen nötig haben. Und natürlich kürzen wir mal wieder ab: $s := \sin(\omega t)$, $c := \cos(\omega t)$, $S := \sin(\Omega t)$, $C := \cos(\Omega t)$. — Nun ist $C$ nicht mehr als Koeffizient erlaubt.

(b) Bei Übung 14 war (wenn man $v_0 = 0$ setzt) $x(t) = \frac{k}{\omega^2}\, s - \frac{k}{\omega}\, t =: x_{\text{ohne}}(t)$ herausgekommen. Wie geht das (a)–Resultat in $x_{\text{ohne}}(t)$ über ?

(c) Auch der Limes $\Omega \to \omega$ ist am (a)–Resultat ausführbar — es ist nur sehr behutsam dabei vorzugehen ($\Omega = \omega + \varepsilon$ setzen, umformen und dann erst $\varepsilon \to 0$ anpeilen). Das Resultat [ nennen wir es $x_=(t)$ ] zeigt in einem (welchem?) seiner zwei Terme, was eine *Resonanzkatastrophe* ist.

(d) *Jetzt erfinden Sie eine „ganz neue" Übungsaufgabe:*
Keine Lichtwelle mehr. Aber ein schwerer Abrißbagger bewegt ab $t = 0$ die Wand, an der das linke Federende befestigt ist. Zu welcher Wandbewegung $x_{\text{wand}}(t) = ?$ wird der ER mit jenem bei (a) identisch ?

$3 + .5 + 1 + .5 =$ 5

20 ) Potentiale

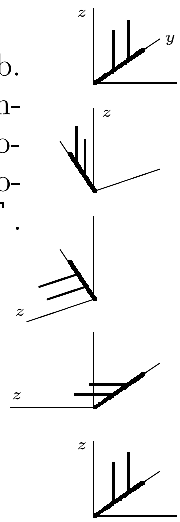
(a) Welches Potential hat das Zentralkraftfeld $\vec{K} = -m\omega^2 \vec{r}$ ? Und wie sieht das zugehörige effektive Potential aus ? Grobe Skizze $V_{\text{eff}}$ über $r$–Halbachse. Trifft der Spruch zu, daß zentrierte Ellipsen $\vec{r}\,(t) = (ac, bs, 0)$ die Bewegungsgleichung lösen ?

(b) $K_1 = -\gamma m M\, 2x\, (R^2 + x^2)^{-3/2}$ war das Ü. 7) (a)–Resultat. Welches Potential $V(x)$ erlebt die Raumsonde $(m)$ auf der Doppelstern–Symmetrieachse ? Test : I. Wir wissen, auf welchen asymptotisch führenden Term sich $V$ bei $x \to \infty$ reduzieren muß, nämlich ? II. Hat Ihr $V(x)$ diese Eigenschaft ?

(c) 2D. Ob das Kraftfeld $\vec{K}(x, y) = (-\lambda x\,,\, \lambda y\,)$ ein Potential hat, soll sich bei komponentenweisem Aufleiten erweisen.

$1.5 + 1 + .5 =$ 3

21 ) Segelschiff in Not




Bei schwerem Wetter kommt ein Zweimaster vom Nordkurs ($y$–Achse) ab. Er dreht sich um $\pi/4$ um die Vertikale, kentert dann nach links, zeigt anderntags wieder nach Norden und kann aufgerichtet werden. Zu jeder Position des Schiffes hat der Kapitän die Richtung notiert, in der er den Polarstern sieht. Vor dem Unwetter sah er ihn in Richtung $\vec{e} = (0, 1, 1)/\sqrt{2}$ .

Das sind vier Drehungen. Wir notieren die zugehörigen Matrizen $D^{(1)}$, $D^{(2)}$, $D^{(3)}$ und $D^{(4)}$ und ermitteln ( aus dem jeweils vorangegangenen Einheitsvektor ) die Polarstern–Richtungen $\vec{e}\,'$, $\vec{e}\,''$, $\vec{e}\,'''$, $\vec{e}\,''''$ .

Welches Produkt aus $D$'s ( Reihenfolge ? ⚡ ) führt von der Startposition direkt zur übernächsten Position, bzw. zur überübernächsten bzw. zur letzten ? Und welche Drehmatrizen kommen dabei jeweils heraus ?

4