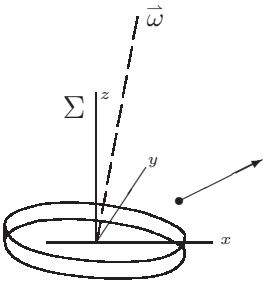
22 ) Rotierende Raumstation




Astronauten möchten die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}$ ihrer ringförmigen Station ermitteln. Sie schießen dazu ab Ursprung = Zentrum eine Leuchtkugel ins All und beobachten ihren Ort :

$$\vec{r}\,'(t) = v_0\,t \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,(c+s) \\ 1+c-s \\ 1-c+s \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} c = \cos(\omega t) \\ s = \sin(\omega t) \end{matrix} .$$

Daß es sich bei $\omega$ um den Betrag der gesuchten Winkelge–schwindigkeit handelt, ist den Leuten sofort klar. Sie beginnen jedoch darüber zu streiten, ob die Entfernung der Kugel etwas mit $\omega$ zu tun hat.

(a) Nanu, so etwas erledigt sich doch durch Ausrechnen : $|\vec{r}\,'| = ?$

(b) Die Achsen des körperfesten Systems $\Sigma'$ der Station mögen zu $t = 0$ mit jenen des skizzierten Inertialsystems $\Sigma$ zusammenfallen. Zu $\vec{r}\,' = D\vec{r}$ wissen wir Dreierlei. 1. In $\Sigma$ hat die Leuchtkugel konstante Geschwindigkeit, so daß $\vec{r} = v_0\,t\,\vec{a}$ gilt mit zeitlich konstantem (und dim.losem) Vektor $\vec{a}$ . 2. $D = c\,1 + (1-c)\,\vec{e} \circ \vec{e} - s\,\vec{e}\times$ 3. In der Gleichung $\vec{r}\,' = D\vec{r}$ ist (nach beidseitigem Streichen von $v_0\,t$ ) Koeffizienten–vergleich möglich: Terme mit $c$ müssen sich kompensieren, ebenso Terme mit $s$ und ebenso Terme ohne $c$ oder $s$ $\curvearrowright$ welche drei Gleichungen ? $\vec{e} = ?$

(c) Achse $\vec{e}$ und Drehwinkel $\omega t$ bekannt — welche neun Elemente hat also die Drehmatrix $D$ ? $\mathrm{Sp}(D) = ?$ Stehen z.B. der zweite und der dritte Spaltenvektor wirklich senkrecht aufeinander ?

(d) Nun kann $\vec{a}$ auf zwei Weisen erhalten werden, via $D^T\vec{r}\,'$ oder aus den drei Gln. bei (b). Wählen Sie den bequemer erscheinenden Weg. Ist $|\vec{r}| = |\vec{r}\,'|$ erfüllt ?

$.5 + 2 + 1.5 + 1 =$ (5)

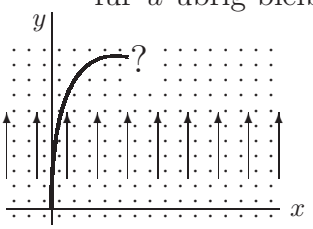
23 ) Nebelkammer — $q$ in $\vec{B}$ mit $v^2$–Reibung

Wenn ein Proton im Magnetfeld durch Gas fliegt, dürfte Reibungskraft $\sim -\,v^2$ einiger–maßen realistisch sein. Wir setzen also $\vec{F} = -m\lambda v\vec{v}$ . Nur und genau diese Abwandlung erfährt nun der Text von Übung 17) (b) . ER für $\vec{v}(t)$ , Ansatz und Lösung $\vec{v}(t) = ?$ Mit der 17)–(b)–Lösung als „Fahrplan“ wird die Angelegenheit recht einfach. (2)

24 ) Ladung in gekreuzten homogenen Feldern $\vec{B} \perp \vec{E}$.

Ein geladenes Teilchen ($q$, $m$, zu $t{=}0$ bei $\vec{r}(0) = \vec{0}$ mit $\vec{v}(0) = \vec{0}$) erlebt ein Magnetfeld $\vec{B} = (\,0\,,\,0\,,\,B\,)$ und ein elektrisches Feld $\vec{E} = (\,0\,,\,E\,,\,0\,)$ ( $E$ und $B$ positiv konstant).

(a) Zuerst notieren wir natürlich den ER für $\vec{v}$ . Durch Abspalten eines konstanten Vektors $\vec{a}$ kann nun per $\vec{v} = \vec{u} + \vec{a}$ zu einer neuen unbekannten Vektorfunktion $\vec{u}(t)$ übergegangen werden. Wir bestimmen $\vec{a}$ so, daß ein möglichst einfacher ER für $\vec{u}$ übrig bleibt, nämlich ? Lösung $\vec{u}(t) = ?$ — und folglich $\vec{v}(t) = ?$




(b) Durch komponentenweises Aufleiten erhalten wir auch $\vec{r}\,(t)$ . In Parameterdarstellung (Parameter $t$) ist damit die in der $xy$–Ebene liegende Bahnkurve des Teilchens bekannt. Sie soll grob qualitativ skizziert werden (Überraschung?!). Zu welchen Zeiten $t_n$ berührt das Teilchen die x–Achse ?

$3 + 2 =$ (5)