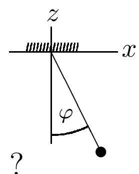
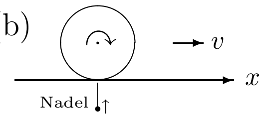
25) Zweimal $\vec{L}$



(a) Die Punktmasse m eines mathematischen Pendels (ℓ) hat den Ortsvektor $\vec{r}(t) = \ell\,(\,s\,,\,0\,,-c\,)$ und folglich den Drehimpuls $\vec{L}\,(t) = ?$ Wie verwandelt sich die bekannte Beziehung $\partial_t \vec{L} = \ldots$ in die Pendel–Gleichung $\ddot{\varphi} = ?$

(b) 

Ein Tischtennisball (M, R, I) rotiert mit ω reibungsfei auf der Platte. Erst nachdem ihm der skzzierte Nadelstich widerfahren ist (infinitesimal hinein), rollt er mit $v = ?$ davon.

$1.5 + 1.5 =$ 3

26) Eine anisotropes Potentialminimum

Im Erdschwerefeld $-mg\vec{e}_3$ hängt ein Massenpunkt m an drei Federn, deren anderes Ende bei $\vec{a}$ bzw. bei $\vec{b}$ bzw. bei $\vec{c}$ befestigt ist:

$$\begin{array}{lll} \kappa\,, & \ell\,, & \vec{a} = (\;2\,,\,2\,,\,1\,)\,\ell\cdot 1/2 \\ 4\,\kappa\,, & \ell\,, & \vec{b} = (-2\,,\,1\,,\,2\,)\,\ell\cdot 5/12 \\ 7\,\kappa\,, & \ell\,, & \vec{c} = (\;1\,,-2\,,\,2\,)\,\ell\cdot 8/21 \end{array}$$

(a) Weil alsbald nützlich, notieren wir zuerst die Entfernungen a, b, c und die Einheitsvektoren $\vec{e}_a$, $\vec{e}_b$, $\vec{e}_c$ dieser drei Orte. Welcher Wert ist der Masse m zu geben, damit sie im Ursprung ihre Gleichgewichtsposition hat?

(b) Zu kleinen Auslenkungen $\vec{r}$ wird sich die Kraft als $\vec{K} = -\kappa \Cap \vec{r} + \mathcal{O}(r^2)$ schreiben lassen. Um die Matrix $\Cap$ zu ergründen, wären nun die drei Federkräfte zu linearisieren. Der Einfachheit halber lassen wir aber jetzt die Federenden auf Ebenen $\perp\ \vec{e}_a$ etc. reibungsfrei gleiten. Dann ändert sich nichts an der Teil–(a)–Lösung, die Einheitsvektoren $\vec{e}_a$, $\vec{e}_b$, $\vec{e}_c$ bleiben von $\vec{r}$–Korrekturen verschont und es gilt in Strenge z.B. $\vec{K}_c = 7\kappa\,\vec{e}_c\,(\,\left[\,c - \vec{e}_c\vec{r}\,\right] - \ell\,)$, d.h. $\vec{K}_c = -7\kappa\,\vec{e}_c\,(\vec{e}_c\vec{r}\,) +$ Terme, welche aufgrund der Teil–(a)–Festlegung in der Summe der vier Kräfte entfallen. — Als welche LK aus dyadischen Produkten erweist sich somit die Matrix $\Cap$? Und zu welchen schönen Zahlen werden schließlich ihre 9 Komponenten ?
(Wie m in der Mulde schwingt, wird auf Blatt 10 studiert werden.)

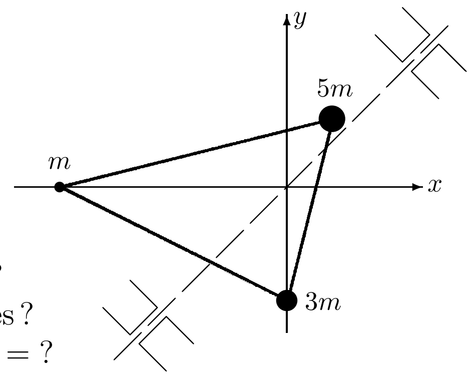
$2 + 2 =$ 4

27) Ein Trägheitstensor

Die drei Massen

$$\begin{array}{lll} m_1 = m & \text{bei} & \vec{r}_1 = (-10\,,\;0\;,\;0\;)\,a \\ m_2 = 3m & \text{bei} & \vec{r}_2 = (\;\;0\;,-5\;,\;0\;)\,a \\ m_3 = 5m & \text{bei} & \vec{r}_3 = (\;\;2\;,\;\;3\;,\;0\;)\,a \end{array}$$

seien punktförmig und durch masselose Drähte starr untereinander verbunden.



(a) Wo liegt der Schwerpunkt $\vec{R}$ des Punktsystems? Und welchen Trägheitstensor $I_1 + I_2 + I_3 = I$ hat es? Wir notieren ihn am besten als $I = 30\,m\,a^2\,H$ mit $H = ?$

(b) Wir vermuten, daß H in einem um die z–Achse gedrehten System einfacher aussieht. Also bilden wir H' (noch unbekannte c, s enthaltend) und bestimmen den Drehwinkel so, daß alle Nichtdiagonalelemente verschwinden. Die Drehmatrix zeigt nun (neben $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$) die neuen Einheitsvektoren $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$. Wir tragen sie in ein Duplikat obiger Skizze ein — es sind die *Hauptachsen* des Körpers. $H' = ?$

(c) Mit den Drähten sei eine durch den Ursprung in $\vec{f}_1$–Richtung verlaufende Achse verlötet. Dreht man den Körper mit ω um diese Achse, so hat er den Drehimpuls $\vec{L}\,' = I'\,\vec{\omega}\,' = ?$

$2 + 2.5 + .5 =$ 5