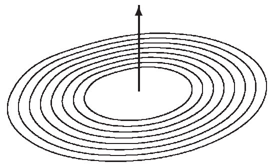
46) Der Saturnring ist ein Draht und die Erde eine Scheibe

(a) Welche 3D Massendichte $\rho(\vec{r})$ hat ein Kreis–Draht $(M,\, R)$, der in der xy–Ebene liegt ? Der Versuch, in Zylinderkoordinaten ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\rho' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$) sein Gravitationspotential $V(\vec{r})$ auszurechnen, bleibt bei einem gewöhnlichen Integral hängen, welchem ? Aber auf der Symmertrieachse wirds einfach: $V_{\text{draht}}(0,0,z) = ?$

(b) Zu einer dünnen Kreisscheibe (R, in xy–Ebene) mit homogen verteilter Masse M interessiere von vornherein nur $V_{\text{scheibe}}(0,0,z) = ?$[1] Geht man mit m nahe an die Scheibe heran ($z \to +0$, $V \to ?$), so folgt $K_3^{\text{oberhalb}} = -\partial_z V = -m\, g_{\text{sch.}}$ mit $g_{\text{sch.}} = ?$

(c) *Superposition.* Die soeben studierte Scheibe läßt sich aus Kreisdrähten mit Radius ρ und Masse $dM = ?$ zusammensetzen. Addieren ($\int$) wir nun die zu diesen infinitesimalen Ursachen gehörigen Antworten $dV(0,0,z)$, so sollten wir erneut beim (b)–Resultat ankommen — nicht wahr ?



$1.5 + 1.5 + 1 =$ 4

Weil mit „$\gamma m M$“ so vertraut, haben wir hier exotische Himmelskörper in Kauf genommen.
Aber eigentlich war es schon Elektrostatik: homogen geladener Kreisdraht und Kondensatorplatte.

47) Kugelförmige Sterne : $\rho(r)$

Ab Gleichung (6.73 b) der Vorlesung kommen Sie o h n e $\rho(r)$ zu spezifizieren noch ein Schrittchen weiter voran, nämlich bis das Gravitationspotential die Gestalt

$$V(r) = -\gamma\, m\, 4\pi \left(\frac{1}{r} \int_0^{?} \dots + \int_{?}^{\infty} \dots \right) \qquad (*)$$

annimmt. Unterstellt man der Erde konstante Dichte, so daß $\rho(r') \approx \rho_0\, \theta(R - r')$ gilt, und begibt sich per Tiefenbohrung in ihr Inneres ($r < R$), so folgt aus $(*)$ der dortige Potentialverlauf $V_{\text{innen}}(r) = ?$
Die Ursache–Antwort–Beziehung $(*)$ läßt sich (angeblich ↯) nach der Ursache $\rho(r)$ auflösen, indem man den Operator $\Delta_r := \frac{1}{r}\, \partial_r^2\, r$ auf $V(r)$ anwendet.
Sehen wir also mal nach, was dabei herauskommt : $\Delta_r V(r) = ?$ 4

Und hier haben wir soeben die erste Maxwell–Gleichung entdeckt,
wiewohl nur elektrostatisch und nur im kugelsymmetrischen Spezialfall.

48) $\boxed{x\, y' + y \;=\; 2\, x}$ — fünf Wege nach Rom

Ausnahmsweise wird hier die Physik erst weiter unten nachgereicht. Zur obigen Dgl soll die allgemeine Lösung $y_{\text{allg}}(x)$ erhalten werden, und zwar unabhängig voneinander

(a) durch Lösen der hom. Dgl und Raten einer speziellen Lsg. der inhomogenen,

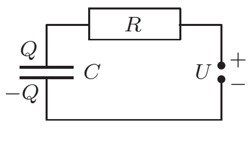
(b) als Anwendungsbeispiel zur P–Q–Formel,

(c) mittels *Neuer Funktion* u , $y = x + u$, und *Trennung der Variablen*,

(d) über *Neue Variable* τ , $x =: e^{\tau}$, und *Variation der Konstanten*,

(e) per sofortiger *Variation der Konstanten.*

(f) *physics* : Am skizzierten RC–Glied wird zu $t = 0$ die konstante Spannung U angelegt, $Q(0) = 0$. Jemand schraubt ständig am Konsdensator, so daß $C(t) = (1 + \omega t)/(R\omega)$ ist. Allgemein gilt $L\, \ddot{Q} + R\, \dot{Q} + Q/C = U$. Aber hier ist $L = 0$.
Wie führt dies auf die y–Dgl ? — $Q(t) = ?$



$.5 + .5 + .5 + 1 + .5 + 1 =$ 4

[1] Obacht: $\sqrt{a^2} = |a|$. Zu Ihrer Kontrolle : natürlich sollte V bei $z \to \pm\infty$ in $-\gamma m M/|z|$ übergehen.