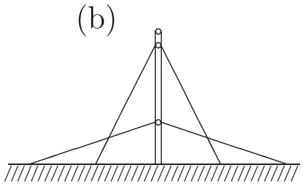
52) Rotationsenergie

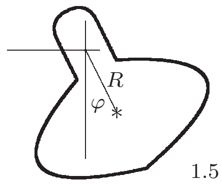
(a) Der am Ort mit ω rotierende TT–Ball (M, $I := I_{\rm pn}$, R) rollt nach Nadelstich mit $v = RI\omega/(MR^2 + I)$ davon [Ü. 25 (b)]. Wie rekapituliert sich dies auf einer Zeile? Eine Portion ΔT = ? kinetischer Energie hat sich dabei in Wärme verwandelt. (Natürlich ist ΔT durch die Vorgaben R, M, I, ω auszudrücken. Und $\Delta T > 0$ will zu sehen sein.)

(b) 

Die beiden Teile der skizzierten Malerleiter haben je homogen verteilte Masse M, Hauptträgheitsmoment I ($:= I_{\rm pn}$) und Länge $2a$. Sie stehen zunächst senkrecht. Nach winziger Erschütterung beginnen die unteren Enden auf dem ideal gebohnerten Fußboden zu gleiten. Mit welcher Geschwindigkeit v_G schlägt das (∞ kleine und masselose) Gelenk auf dem Boden auf? ($v_s :=$ | Schwerpkt.Geschw. |)

(c) Wir legen uns ein Malerleiter–Teil auf die x–Achse seines PN–Systems und rechnen I aus. Damit wird das (b)–Resultat zu $v_G = \sqrt{6\,g\,a}$. Ob das sogar stimmt?

(d) Die φ–Bewegungsgleichung des skizzierten physikalischen Pendels (R, M, $I_{\rm pn}$) soll sich ergeben, indem wir den Energiesatz aufschreiben, ihn durch φ, $\dot\varphi$ ausdrücken und dann ∂_t darauf anwenden.



$1.5 + 2 + .5 + 1 =$ 5

53) A–B–A–Molekül

Wir bleiben bescheiden eindimensional und lassen die skizzierten drei Atomkerne ($m_1 = m$, $m_2 = 4m$, $m_3 = m$) sich nur auf der x–Achse bewegen. Sie seien auch nur zweifach „verfedert“ (je κ, ℓ) — eine dritte Feder wäre möglich, welche m_1 mit m_3 verbindet. Als Gleichgewichtslage sehen wir $(x_{01}\,,\, x_{02}\,,\, x_{03}) = (0\,,\,\ell\,,\,2\ell)$ an.

Wie hängt das Gesamtpotential V des Systems von x_1, x_2, x_3 ab? Und wie von den Auslenkungen η_1, η_2, η_3 aus der Gleichgewichtslage? Mit welcher symmetrischen Matrix Ω bekommt das Potential die Gestalt $V = \frac{1}{2}\,\kappa\,\vec\eta\,\Omega\,\vec\eta$? ($\kappa\,\Omega$ ist die „Kappamatrix“ der Vorlesung) Wir setzen $\frac{1}{\sqrt{M}}\Omega\frac{1}{\sqrt{M}} =: \frac{1}{2m}H$ mit H = ? Welche Eigenwerte λ_j hat H ($\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$) und welche zugehörigen normierten Eigenvektoren $\vec f_j$? Wie sieht die mit H formulierte Bewegungsgleichung aus ($\ddot{\vec u} = \ldots$) und mit welchen drei Frequenzen ω_j schwingt folglich das Molekül?
Nun wäre ja eigentlich vollständig zu den Auslenkungen $\vec\eta$ zurückzukehren. Der Einfachheit halber nehmen wir an, die beiden höheren Frequenzen seien n i c h t a n g e r e g t. Welche allgemeine Lösung $\vec\eta(t)$ bleibt dann übrig? 4

54) Kleine Schwingung auf Fahrstrahl

Kepler–Problem, Ursprung im Zentrum. Ein Bewohner des Fahrstrahls bemerkt gar nicht, daß sich seine r–Achse mit $\dot\varphi$ = ? um ihr linkes Ende dreht. Er findet, daß ein Teilchen m das Potential $V_{\rm eff}(r)$ = ? erlebt und der Bewegungsgleichung $m\ddot r$ = ? folgt. (Man erhält sie am einfachsten durch Anwenden von ∂_t auf $E = \frac{1}{2}m\dot r^2 + V_{\rm eff}(r)$)
„Ah“, sagt er, „mein Potential hat ja ein Minimum, nämlich bei R = ? Nun kann ich für das folgende die Konstante L durch R ausdrücken. Jetzt sehe ich mir per $r = R + \eta$ kleine Schwingungen an. Ob es egal ist, $V_{\rm eff}$ bis mit η^2 zu entwickeln oder die rechte Seite der Bewegungsgleichung bis mit η? Nein.“ Hat er gesagt. (Eines davon zu tun genügt.)
Mit welcher Kreisfrequenz $\omega^2_{\rm schwing}$ = ? schwingt also m auf der r–Achse? Wir vergleichen mit der Kreisbahn–R–Umlauf–Frequenz $\omega^2_{\rm umlauf}$ = ? (steht eigentlich bereits oben irgendwo) — und staunen. Diese Anziehungskraft $\sim -1/r^2$ ist also etwas ganz Besonderes. 3