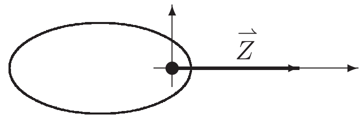
55) Der Schnellweg zur Kepler–Ellipse



(a) bedarf einer Vorbereitung. Es ist nachzuweisen, daß sich der *Lenz–Vektor*

$$\vec{Z} := \vec{v} \times \vec{\ell} - \gamma M \frac{\vec{r}}{r}$$

zeitlich nicht ändert. Hierin ist $\vec{\ell} := \vec{r} \times \vec{v}$ nur eine Abkürzung. Bei Untersuchung von $\partial_t \vec{Z}$ wird die Bewegungsgleichung $\dot{\vec{v}} = \ldots$ von m benötigt.

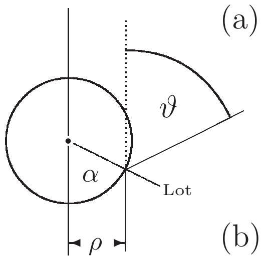
(b) Aber nun. Wir wissen, daß es sich bei $\ell^2 = \vec{\ell} \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$ um eine Konstante handelt. Wird rechts der Lenz–Vektor $\vec{Z}$ ins Spiel gebracht, so steht auf einmal $r = \dfrac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}$ auf dem Papier nämlich zu $p = ?$ und $\epsilon = ?$

(c) Auch der Fall $\gamma = 0$ darf noch als Kepler–Problem gesehen werden. Dann wird die Bewegung zu $\vec{r}(t) = (\, r_0 \, , \, v_0 t \, , \, 0 \,)$ und $\vec{v} = ?$ $\vec{\ell} = ?$ $\vec{Z} = ?$ $Z = ?$ $\ell = ?$ Wird auch obiger r–φ–Zusammenhang zur Polarkoord.–Darstellung der Bahn ?

(d) Bekanntlich ist die Bahn $\varphi(r)$ auch allgemein aus einem Integral erhältlich. Wir werten es im Falle $V \equiv 0$ zur Situation von (c) aus und erhalten die dortige Geraden–Darstellung erneut.

$1.5 + 1.5 + 1 + 1 =$ 5

56) Streuquerschnitt

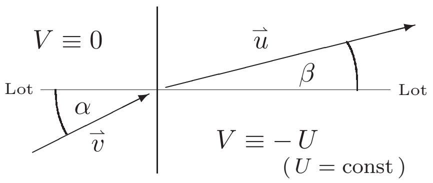


(a) Bei Streuung an einer harten Kugel ($V(r) = V_0 \, \theta(R - r)$, $V_0 > \frac{m}{2} v^2$) kann die Funktion $\rho(\vartheta)$ bequem ermittelt werden. Welchen differentiellen Streuquerschnitt $\sigma(\vartheta)$ hat also dieses Problem ?

(Fragt da doch glatt noch einer, ob hier das Reflexions„gesetz“ erlaubt sei. — Sklavenseele ! In einem winzigen Bereich an der Kugel wirkt fast-homogene Kraft in Richtung ... Und der Freie Fall in diesem Bereich hat das Lot als Symmetrieachse, klar ? !!)

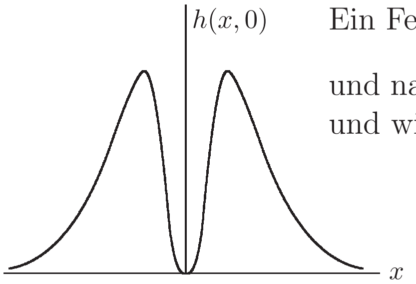
(b) Ist $V_0 < 0$, so bewegen sich Teilchen mit $\rho < R$ mit veränderter Richtung durch die Kugel, und $\sigma(\vartheta)$ auszurechnen wird bereits recht unangenehm. Wir begnügen uns daher hier mit dem Detail der *Brechung* :

Ein Teilchen (m) fliegt mit bekannter Geschwindigkeit $\vec{v} = (\, v_1 \, , \, v_2 \,)$ von links kommend durch $V(x, y) = - U \, \theta(x)$. Welche Geschwindigkeit $\vec{u}$ hat es im rechten Halbraum ? Der Brechungsindex ist durch $n := \sin(\alpha) / \sin(\beta)$ definiert. Wie drückt sich n durch allein U und T aus ? ($T := mv^2/2$)



$1.5 + 1.5 =$ 3

57) Dolomiten



Ein Felsmassiv habe das Höhenprofil $h = \dfrac{h_0}{\mathrm{ch}(\, f + \frac{2}{f} \,)}$ mit $f = \dfrac{r^2}{2ax}$ und natürlich $r^2 = x^2 + y^2$. Welcher Gleichung folgen die Äqui–h–Linien und wie (Handskizze) liegen sie in der xy–Ebene ?

Wir bilden den 2D Gradienten von h und interessieren uns dann der Einfachheit halber nur für seinen Einheitsvektor $\vec{e}_{\text{grad}} = ?$ Drachengleiter möchten erfahren, an welchen Stellen $\vec{e}_{\text{grad}}$ nach Norden (y–Richtung) zeigt. Auf welchen Kurvenstücken ($y(x)$ von, bis) ist dies der Fall. Auch wenn wir ∇ in Polarkoordinaten aufschreiben (tun !) und auf $h(r, \varphi)$ anwenden, sollte sich $\vec{e}_{\text{grad}}$ ergeben. Sind die beiden $\vec{e}$'s wirklich gleich ?

4