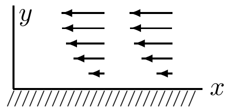
58) Vier mal Rotation

(a) Welche Beziehungen zwischen den vier Konstanten sorgen dafür, daß die ebene Wasserströmung $\vec{v} = (\,Ax + By\,,\, Cx + Dy\,,\, 0\,)$ weder Wirbel noch Quellen hat? Wie nun zu speziell $B = 0$ die Strömung aussieht, das zeige eine Skizze.

(b) $\nabla \times [\,\vec{A}(\vec{r}\,) \times \vec{r}\,] = 2\vec{A} - \vec{r}\,\operatorname{div}\vec{A} + r\,\partial_r\vec{A}$ — wie kommt das heraus? (zweizeilig wäre super)

(c) Zu welchem λ–Wert ist das Blumenstrauß–Magnetfeld $\vec{B} = \alpha\,\dfrac{\lambda\, z\,\vec{r} - r^2\vec{e}_3}{r^5}$ (ausgenommen Ursprung) wirbelfrei?
(Empfehlung: $\vec{B}$ in $\vec{B} = \alpha\,\lambda\,\vec{C} + \alpha\,\vec{D}$ zerlegen und $\vec{C}$, $\vec{D}$ separat untersuchen.)

(d) Am Ufer (x–Achse) der Leine nimmt die Wirbelstärke zur Flußmitte hin (y–Richtung) ab: $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{e}_3\,\omega\, e^{-y/a}$. $\vec{v}(\vec{r}\,) = ?$



(Ansatz für $\vec{v}(\vec{r}\,)$?! „Nanu, beim Aufleiten bleibt mir ja eine Konstante übrig.“ — Antwort: „Wir machen hier Sinn!“)

$1 + 1 + 1.5 + 1.5 =$ 5

59) Feld zwischen parallelen Ebenen

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (3)$$
$$\nabla \times \vec{B} = \vec{\jmath}\,\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \qquad (4)$$

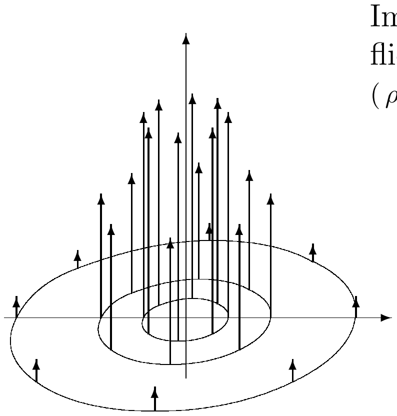
(a) Magnetostatik.
Das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}\,) = (\,0\,,\, B\,[\theta(x) - \theta(x-a)]\,,\, 0\,)$ soll hergestellt werden.
„Feld gegeben, Ursache ermitteln“ ist ($\neq$ Übung 58) (d) und 60) die denkbar einfachste Fragestellung. Ihr mechanisches Analogon lautet „$\vec{r}(t)$ gegeben, Kraft (längs Bahn) ermitteln“.
Im Kopf: die Forderung ist möglich, d.h. sie erfüllt (3), nicht wahr? Mit welcher Stromdichte $\vec{\jmath}(\vec{r}\,)$ ist der Raum auszustatten? Wie läßt sich das Resultat mit ein paar $\vec{B}$– und $\vec{\jmath}$–Pfeilen und zwei symbolischen Plattenrändern halbwegs perspektivisch darstellen?

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho\,\frac{1}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$
$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \qquad (2)$$

(b) Elektrostatik.
Analog zu (a) — nur eine andere Komponente füllend — kann auch das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}\,) = ?$ eines Plattenkondensators angesetzt werden (positive Platte = Ebene $x = 0$, negative = Ebene $x = d$). Im Kopf: (2) ist erfüllt, nicht wahr? Mit welcher Ladungsdichte $\rho(\vec{r}\,)$ ist der Raum auszustatten?

$2 + 1 =$ 3

! 60) Der allgemeine gerade dicke Leitungsdraht



Im ganzen Raum (dank unbeweglicher Atomkerne ladungsneutral) fließt Ladung nach oben: $\vec{\jmath}(\vec{r}\,) = \varepsilon_0 c^2\, f(\rho)\,\vec{e}_3$
(ρ ist Zylinderkoordinate).

(a) Die Funktion f sei bekannt (nur noch nicht spezifiziert). Wir lösen das magnetostatische Problem mittels A n s a t z für $\vec{B}(\vec{r}\,)$.
($B(\rho)$ mal welcher Einheitsvektor? Wir bleiben kartesisch, setzen $\frac{1}{\rho}B(\rho) =: g(\rho)$, gewinnen eine Dgl für g und erhalten deren allgemeine Lösung. Sie wird ein $\int_0^\rho d\rho'$ … enthalten und eine Konstante. Der Wert der letzteren (nämlich?) wird klar, wenn wir den zugehörigen $\vec{B}$–Anteil physikalisch interpretieren und den Umstand bedenken, daß wir über das linke Ende der ρ–Halbachse nicht hinweg–differenzieren konnten.)

(b) Spezialfall Hohlleiter. Fließt ein bekannter Strom I durch ein vertikales, ∞ dünnwandiges Rohr (R) nach oben, so ist $f(\rho) = ?$ anzusetzen und der Vorfaktor in f durch I auszudrücken. Mittels (a)–Resultat ergibt sich — ein $\theta(...)$ enthaltend — das Magnetfeld $\vec{B} = ?$ des Hohldrahtes im ganzen Raum.

$2 + 2 =$ 4