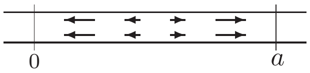
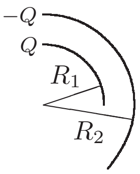
61) Drei mal Divergenz

(a) 

Auf einen ∞ langen Graben regnet es bei $x \in (0, a)$, so daß dort $\operatorname{div}\vec{v} = \gamma = \text{const}$ ist und $\vec{v} = v(x)\,\vec{e}_1$. $v(x)_{\text{innen}} = ?$

(b) Zu welchem λ ist das Blumenstrauß–Magnetfeld $\vec{B} = \alpha\,\dfrac{\lambda\, z\,\vec{r} - r^2\vec{e}_3}{r^5}$ quellenfrei ?

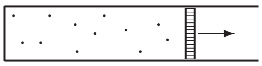
(c) Zu allgemein kugelsymmetrischer Ladungsverteilung $\rho(r)$ sollen die elektrostatischen Maxwell–Gleichungen gelöst werden: Ansatz für $\vec{E}$ und schließlich $\vec{E} = ?$ selber. Die Begleitphilosophie ist jener der Übung 60) (a) sehr ähnlich. Natürlich bleibt ein r'–Integral stehen.)

(d) 

Anwendungsbeispiel (und Test) zum (c)–Resultat sei der Kugelkondensator: Q auf Kugeloberfläche R_1 und $-Q$ auf R_2 . $\rho(r) = ?$ $\vec{E} = ?$
Elektrostatisches Potential $\phi(r) = ?$ im Zwischenraum,
Spannung $U = ?$ Kapazität $C := Q/U = ?$
Schreibt man $R_1 = R$, $R_2 = R + d$ und studiert $d \to 0$, so entsteht die Kapazität eines Plattenkondensator, nämlich mit Fläche $F = ?$

$.5 + 1 + 1.5 + 2 =$ (5)

62) C o n t i



(a) Expansion eines Gases. In einem Rohr (bei $x = 0$ verschlossen, Querschittfläche F) befinden sich N Teilchen. Der Kolben wird mit $x_{\text{k}}(t) = L\,\dfrac{1 + 2\omega t}{1 + \omega t}$ so langsam bewegt, daß die Teilchendichte $n(t) = ?$ stets ortsunabhängig bleibt. Welche Stromdichte $\vec{\jmath} = \jmath(x,t)\,\vec{e}_1$ liegt im Inneren vor ? Test: (I) Wie *sollte* $\jmath(x_k(t), t)$, d.h. die Stromdichte am Kolben, mit $n(t)$ zusammenhängen ? — (II) Ist diese Beziehung erfüllt ?

(b) Nach einer Explosion hat die Luft im U–Bahn–Tunnel die Teilchendichte
$n = n_0 + n_1\, e^{-\alpha(x-ct)^2}$. (n_0, n_1, α sind positive Konstante und c ist die Schallgeschwindigkeit in Luft) Welche Teilchenstromdichte $\jmath(x,t)$ begleitet den Knall ?
(mit $\jmath$ ist die erste Komponente gemeint: $\vec{\jmath} = \jmath(x,t)\,\vec{e}_1$)

(c) Weil eine Schall–Kugelwelle ständig am Ursprung erzeugt wird, ist der Luftraum ($n_0 :=$ Teichendichte bei Stille) von der kugelsymmetrisch–radialen Teilchenstromdichte
$$\vec{\jmath} = \frac{\alpha\,\omega}{k}\,\frac{\vec{r}}{r^3}\left[r\,c - \frac{s}{k}\right] \quad \text{mit} \quad c := \cos(kr - \omega t)\ ,\ s := \sin(kr - \omega t)$$
erfüllt. Welche Teilchendichte $n(r,t)$ hat die Kugelwelle ? Mit welcher Geschwindigkeit v bewegen sich Flächen konstanter Dichte n_0 ?

$1.5 + 1 + 2.5 =$ (5)

63) $\Delta\,\frac{1}{r} \;=\; -\,4\pi\,\delta(\vec{r})$

(a) Auch mit der Einbettung $\chi(r) = \frac{1}{r}\left(1 - e^{-r/\varepsilon}\right)$ läßt sich obiger Zusammenhang gut nachweisen. Natürlich ist dabei zuletzt per $\int d^3r \ldots$ eine neue $\delta(\vec{r})$–Darstellung dingfest zu machen.

(b) Würden wir in 2D leben, dann wäre $\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ unser Laplace–Operator. Daß $\Delta_{2\,r} = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r$ sein radialer Anteil ist, glauben wir (wegen Analogie zur bekannten Rechnung in 3D). Aber wir prüfen nach, ob die Operator–Identität $\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r \;\equiv\; \frac{1}{r}\,\partial_r\, r\,\partial_r$ gilt. Deren rhs zeigt (per Δ_2–Anwenden im Kopf), daß nun $-\ln(r)$ das Potential einer Punktladung dieser 2D Welt ist.
Wir erwarten $\Delta_{2\,r}\ln(r) = \lambda\,\delta(\vec{r})$, denken uns eine einfache Einbettung des ln aus und ergründen den Wert von λ .

$1 + 1 =$ (2)