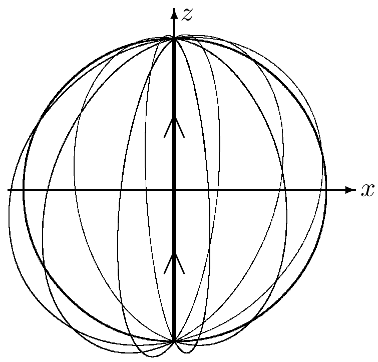
64) Magnetischer Dipol macht Blumenstrauß

Die aus Theorem 3 bekannte Lösung $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, $\vec{A} = \int d^3r' \, \dfrac{\vec{W}(\vec{r}\,')}{4\pi\,|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$, $\vec{W} = \dfrac{\vec{\jmath}}{\varepsilon_0 c^2}$ der Magnetostatik hat Schwierigkeiten.
So ist z.B. bereits zu Kreisstrom $\vec{\jmath} = I\,\delta(z)\,\delta(\rho - R)\,\vec{e}_\varphi$ das Integral nicht mehr ausführbar — es sei denn wir lassen den Kreisstrom per $R \to 0$ (und zugleich $I \to \infty$) zu einem *magnetischen Dipol* werden. Noch vor Integration können wir nun $1/\sqrt{}$ vereinfachen (als $1/\sqrt{} = \ldots ? \ldots + \mathcal{O}(R^2)$ schreiben), daraufhin das φ'–Integral schlachten und schließlich

$$\vec{A} = \frac{I \cdot \text{Kreisfläche}}{4\pi\,\varepsilon_0 c^2}\left(-\frac{y}{r^3}\,,\,\frac{x}{r^3}\,,\,0\right)$$

erhalten. Ist es so?
Ob sich nun per $\nabla\times$ wirklich das bekannte Blumenstrauß–Feld $\vec{B}$ ergibt? (4)

65) Nord–Süd–Strom



Auf der Symmertrieachse einer Kugel (R) fließt Strom I nach oben (z–Achse). Die Ladung strömt dann auf der leitenden Kugeloberfläche von N nach S wieder zurück, und zwar zylindersymmetrisch auf Meridianen. Da sich nirgends Ladung anhäuft, gilt die *Conti* zu $\dot{\rho} \equiv 0$.

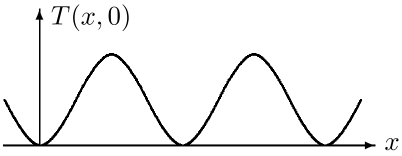
(a) Zuerst will (gültig im ganzen Raum) die Stromdichte $\vec{\jmath}\,(\vec{r}\,)$ zu Papier. Obigem Text folgend haben wir sie als $\vec{\jmath} = \vec{e}_3\,I\,\delta(x)\,\delta(y)\,\theta(R - |z|) + \vec{e}_\vartheta\,f(\vartheta)\,\delta(r - R)$ anzusetzen. (Hätten Sie es ggf. auch selber so gemacht ?!) .

- Aus der Quellenfreiheit des zweiten $\vec{\jmath}$–Terms soll nun die Funktion $f(\vartheta)$ bestimmt werden. Auch über anschauliche Argumente käme man zum Ziel, aber hier s o l l f aus Rechnung folgen. Endlich kommt einmal Nabla in Kugelkoordinaten zu Ehren, eine homogene Dgl 1. Ordnung für $f(\vartheta)$ entsteht und läßt sich lösen.
- Den unbekannt gebliebenen f–Vorfaktor erhalten wir aus der Forderung, daß in der Äquatorebene abseits Ursprung insgesamt der Strom I nach unten fließt.

(b) Um das von $\vec{\jmath}$ verursachte Magnetfeld mittels integraler statischer 4. Maxwell–Gleichung zu erhalten, ist Information über seine Richtung erforderlich. Angenommen — sehr mutig, aber bei (c) wird ja nachgeprüft — $\vec{B}$ ist überall $\sim \vec{e}_\varphi$ $\curvearrowright$ $\vec{B} = ?$ und zwar, weil $\theta(...)$ enthaltend, gültig im ganzen Raum.

(c) Das Nachprüfen ist eine jener „einfachsten“ Fragestellungen ($\vec{B}$ gegeben, Ursache $\vec{\jmath}$ gesucht), allerdings hier rechentechnisch ein wenig biestig (Empfehlung: $\nabla\times$ kartesisch ausführen). Die Singularität an der z–Achse bleibe beiseite (ist mit Ü. 60 erledigt). Kommt der zweite $\vec{\jmath}$–Term des (a)–Resultates wieder richtig heraus? $3 + 1 + 2 =$ (6)

66) Diffusion gleicht aus. $T(\vec{r}, t) = \mathrm{e}^{\,t D \Delta}\, T(\vec{r}, 0)$



Zur Zeit $t = 0$ liege die räumliche, aber nur mit x variierende Temperatur–Verteilung $T(x, 0) = 2\,T_0 \sin^2(kx)$ vor. Wie verändert sich dieses „Wellblech“ im Laufe der Zeit? Welche Gestalt erreicht es im Limes $t \to \infty$? (2)