

67) Separationsansatz

Die Diffusionsgleichung kann auch ganz anders (als nach T -Zukunft) gefragt werden, nämlich ob sie *formstabile Lösungen* habe. d.h. solche, deren Zeitabhängigkeit nur im Vorfaktor erscheint. Im kugelsymmetrischen Spezialfall setzen wir also

$$T = T_0 + f(t)g(r) \quad \text{in} \quad \dot{T} = D \Delta T$$

ein. Nach Trennung der Variablen sehen wir uns gezwungen, $(rg)''/(rg) = -\kappa^2$ zu setzen (oder auch $= +\kappa^2$, siehe unten). Wie sehen also solche (im Ursprung bitte endlich bleibenden) Lösungen $T_-(r, t)$ aus?

Auch zum anderen Vorzeichen vor κ^2 ergeben sich $T_+(r, t)$'s. Können Sie mit Worten und Skizze erklären, daß auch solche T_+ durchaus physikalisch sinnvoll sind?

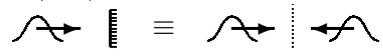
Schließlich setzen wir $\kappa^2 = 0$ (treiben Thermo-Statik) und erhalten (zwei Konstante involvierend) $T_0(r) = ?$ Außerhalb einer ständig auf T_1 gehaltenen Kugel (R) in einem Medium, das weit draußen T_0 erreicht, läßt sich also das Profil $T_{\text{außen}}(r) = ?$ aufrecht erhalten. (Die formstabilen Lösungen der Schrödinger-Gleichung nennt man „stationäre Lösungen“)

3

68) Wellengleichung

(a) Wir kennen die allg. Lösung in 1D. Irgendwie hilft dies dabei, auch in 3D, jedoch kugelsymmetrischer Situation, die allgemeine Lösung $n(r, t)$ aufzuschreiben.

(b) Der Separationsansatz $n(r, t) = n_0 + f(t)g(r)$ soll zu einer stehenden Kugelschallwelle der Frequenz ω führen: $n(r, t) = ?$ (trig's gibt es zwei, wählen Sie einfach eine.)

(c) 1D Schallreflexion an einer Wand bei $x = 0$. „Was gilt dort?“ und „Woraus entstand die Wellengleichung?“ führen uns auf einen Zusammenhang zwischen den Funktionen f und g in der allg. 1D-Lösung. Er bringt $n(x, t)$ auf eine Gestalt, die die Äquivalenz mit einem Problem ohne Wand zeigt. 

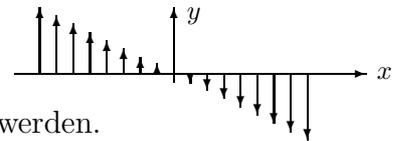
(d) Eine ∞ lange gespannte Saite ($K, \sigma, K/\sigma = : c^2$) wird aus Ruhe ($y(x, 0) = 0$) angestoßen: $\dot{y}(x, 0) = v(x)$. Zu $v(x) = \frac{v_0 a^3 2x}{(a^2 + x^2)^2} = \partial_x \frac{-v_0 a^3}{a^2 + x^2}$ folgt problemlos¹ ein sehr vernünftiges $y(x, t) = ?$ (Skizze y über x zu einer späteren Zeit)

Aber zu $v(x) = \frac{v_0 a 2x}{a^2 + x^2}$ passiert Übles (weil aus Gültigkeitsbereich von $\ddot{y} = c^2 y''$ herausführend). Wie verhält sich nämlich $y(ct, t) = ?$ bei großer Zeit?

.5 + 1 + 2 + 1.5 = 5

69) Zwei mal Maxwell

(a) Das elektrische Feld $\vec{E} = \alpha(0, -tx, 0)$



soll in einem größeren Raumbereich hergestellt werden.

Welches Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ wird den Vorgang mindestens begleiten? Mit welcher Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}, t)$ ist der Raum zu erfüllen?

Bei Problemen dieser Art haben Sie bitte Mitleid mit der Hersteller-Firma und treffen ggf. die einfachst-mögliche Wahl. Übrigens will der gestrenge Herr Maxwell stets alle seine vier Gleichungen befragt wissen.²

(b) Wenn man $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$

zu einem komplexwertigen Feld $\vec{\psi} := \varepsilon_0 c \left(\vec{E} + i c \vec{B} \right)$ zusammenfaßt, welche „Welt-Anfangsbedingung“ erfüllt dann dieses neuartige Vektorfeld und welcher Bewegungsgleichung folgt es? Wie ergibt sich die *Conti* aus diesen beiden Gleichungen? Im Vakuum, wo per definitionem $\rho \equiv 0$ und $\vec{j} \equiv \vec{0}$ ist, gehorcht $\vec{\psi}$ der Schrödinger-Gleichung, nämlich einer mit Hamilton-Operator $H = ?$

4

¹ weil die Vorlesung unter (10.17) f bzw. g zu $\frac{1}{2} n(x, 0) \mp \frac{1}{2} \text{ST} \{ \dot{n}(x, 0)/c \} \pm \text{Konstante}$ angegeben hatte

² Sie machen alles richtig, aber nicht die Firma, welche nur ρ und \vec{j} mitgeteilt bekam: kein \vec{E} entsteht. Die Firma muß eben auch Ihr \vec{B} herstellen — mit einer großen Spule, die den Raumbereich umgibt.