67) Separationsansatz

Die Diffusionsgleichung kann auch ganz anders (als nach T–Zukunft) g e f r a g t werden, nämlich ob sie *formstabile Lösungen* habe. d.h. solche, deren Zeitabhängigkeit nur im Vorfaktor erscheint. Im kugelsymmetrischen Spezialfall setzen wir also

$$T = T_0 + f(t)\, g(r) \qquad \text{in} \qquad \dot{T} = D\, \Delta\, T$$

ein. Nach Trennung der Variablen sehen wir uns gezwungen, $(rg)''/(rg) = -\kappa^2$ zu setzen (oder auch $= +\kappa^2$, siehe unten). Wie sehen also solche (im Ursprung bitte endlich bleibenden) Lösungen $T_-(r,t)$ aus?

Auch zum anderen Vorzeichen vor κ^2 ergeben sich $T_+(r,t)$'s. Können Sie mit Worten und Skizze erklären, daß auch solche T_+ durchaus physikalisch sinnvoll sind?

Schließlich setzen wir $\kappa^2 = 0$ (treiben Thermo–Statik) und erhalten (zwei Konstante involvierend) $T_0(r) = ?$ Außerhalb einer ständig auf T_1 gehaltenen Kugel (R) in einem Medium, das weit draußen T_0 erreicht, läßt sich also das Profil $T_{\text{außen}}(r) = ?$ aufrecht erhalten.

(Die formstabilen Lösungen der Schrödinger–Gleichung nennt man „stationäre Lösungen") ③

68) Wellengleichung

(a) Wir kennen die allg. Lösung in 1D. Irgendwie hilft dies dabei, auch in 3D, jedoch kugelsymmetrischer Situation, die allgemeine Lösung $n(r,t)$ aufzuschreiben.

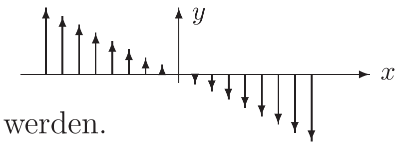
(b) Der Separationsansatz $n(r,t) = n_0 + f(t)\, g(r)$ soll zu einer stehenden Kugel–Schallwelle der Frequenz ω führen: $n(r,t) = ?$ (*trig*'s gibt es zwei, wählen Sie einfach eine.)

(c) 1D Schallreflexion an einer Wand bei $x = 0$. „Was gilt dort?" und „Woraus entstand die Wellengleichung?" führen uns auf einen Zusammenhang zwischen den Funktionen f und g in der allg. 1D–Lösung. Er bringt $n(x,t)$ auf eine Gestalt, die die Äquvialenz mit einem Problem ohne Wand zeigt. 

(d) Eine ∞ lange gespannte Saite (K, σ, $K/\sigma =: c^2$) wird aus Ruhe ($y(x,0) = 0$) angestoßen: $\dot{y}(x,0) = v(x)$. Zu $v(x) = \dfrac{v_0\, a^3\, 2\, x}{(a^2 + x^2)^2} = \partial_x \dfrac{-\, v_0\, a^3}{a^2 + x^2}$ folgt problemlos[1] ein sehr vernünftiges $y(x,t) = ?$ (Skizze y über x zu einer späteren Zeit)
Aber zu $v(x) = \dfrac{v_0\, a\, 2\, x}{a^2 + x^2}$ passiert Übles (weil aus Gültigkeitsbereich von $\ddot{y} = c^2 y''$ herausführend). Wie verhält sich nämlich $y(ct,t) = ?$ bei großer Zeit?

$.5 + 1 + 2 + 1.5 =$ ⑤

69) Zwei mal Maxwell



(a) Das elektrische Feld $\vec{E} = \alpha\, (\, 0\, ,\, -\, t\, x\, ,\, 0\,)$
soll in einem größeren Raumbereich h e r g e s t e l l t werden.
Welches Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r},t)$ wird den Vorgang mindestens begleiten? Mit welcher Stromdichte $\vec{\jmath}\,(\vec{r},t)$ ist der Raum zu erfüllen ? Bei Problemen dieser Art haben Sie bitte Mitleid mit der Hersteller–Firma und treffen ggf. die einfachst–mögliche Wahl. Übrigens will der gestrenge Herr Maxwell stets a l l e seine vier Gleichungen befragt wissen.[2]

(b) Wenn man $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ zu einem komplexwertigen Feld $\vec{\psi} := \varepsilon_0\, c \left(\vec{E} + \mathrm{i}\, c\, \vec{B} \right)$ zusammenfaßt, welche „Welt–Anfangsbedingung" erfüllt dann dieses neuartige Vektorfeld und welcher Bewegungsgleichung folgt es? Wie ergibt sich die *Conti* aus diesen beiden Gleichungen? Im Vakuum, wo per definitionem $\rho \equiv 0$ und $\vec{\jmath} \equiv \vec{0}$ ist, gehorcht $\vec{\psi}$ der Schrödinger–Gleichung, nämlich einer mit Hamilton–Operator $H = ?$

$2 + 2 =$ ④

---

[1] weil die Vorlesung unter (10.17) f bzw. g zu $\frac{1}{2}\, n(x,0) \mp \frac{1}{2}\, \mathrm{ST}\, \{\dot{n}(x,0)/c\} \pm$ Konstante angegeben hatte

[2] Sie machen alles richtig, aber nicht die Firma, welche nur ρ und $\vec{\jmath}$ mitgeteilt bekam: kein $\vec{E}$ entsteht. Die Firma muß eben auch Ihr $\vec{B}$ herstellen — mit einer großen Spule, die den Raumbereich umgibt.