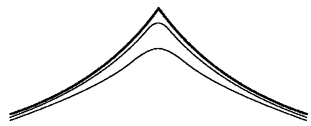
73) Fourier–Reihe gibt Summen

In Übung 72) hatten wir uns
$$h\,\mathrm{ch}\Big(\frac{2\alpha}{L}\Big[x-\frac{L}{2}\Big]\Big)^{\text{in }(0,L)}_{L\text{–periodisch}} = \sum_n \frac{h\,\alpha\,\mathrm{sh}(\alpha)}{(\pi n)^2+\alpha^2}\, e^{\mathrm{i}\,n\,\frac{2\pi}{L}\,x}$$
erarbeitet, gültig natürlich auch für spezielle x–Werte. Also ist $S_1 = \sum_n \frac{(-1)^n}{(\pi n)^2+\alpha^2} = ?$ Auch $S_2 = \sum_n \frac{\alpha}{(\pi n)^2+\alpha^2} = \frac{\mathrm{ch}(\alpha)}{\mathrm{sh}(\alpha)}$ ist richtig — wirklich? Aus S_2 erhalten wir $S_3 = \sum_n \frac{-x}{(\pi n)^2-x^2} = ?$ Wie erklärt es sich, daß $S_4 = \sum_n \frac{1}{\pi n+x}$ gleich S_3 ist? Ein Weg von S_4 zu $S_5 = \sum_n \frac{1}{2\pi n+x} = \frac{\cos(x/2)}{2\,\sin(x/2)} = \frac{\cos(x)+1}{2\,\sin(x)}$ ist leicht gefunden. Wie verhilft S_5 schließlich zu
$$S_6 = \sum_n \frac{2\,x}{(2\pi n+y)^2-x^2} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)-\cos(y)} \qquad ?$$
3.5

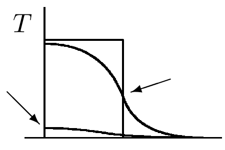
Und diese Summe schreiben wir uns in den Bronstein–Einband, weil sie direkt zur Lösung führt, wenn einmal nach den Energie–Bändern eines 1D Festkörpers (*Dirac–Kamm*) gesucht wird.

74) Temperatur–Berge „schmelzen ab“



(a) Zum periodischen Zelt (s.Ü.73) setzen wir $h = T_0$ und und sehen es als Start–Temperatur eines Mediums (D) an. Welche Zukunft $T(x,t)$ hat das Gebirge? Auch wenn wir $\dot{T}(0,t)$ bilden, bleibt noch die n–Summe stehen. Aber wenn wir über $t\to 0$ nachdenken (dominieren kleine oder große n?), fallen uns zwei Vereinfachungen ein, welche zum asymptotisch führenden Term führen, nämlich $\dot{T}(0,t\to 0) \to ?$ (Dimensionsprobe?!)
Zu $t\to 0$ ist auch interessant, wie sich die Krümmung $T''(0,t)\to ?$ verhält. Falls nun eine(r) nicht erneut rechnen will: es ist auch eine sofortige Antwort möglich.

(b) Heiße Kugel: $T(\vec{r},0) = T_0\,\theta(R-r)$. $\widetilde{T}(\vec{k},0) = ?$ und folglich $T(\vec{r},t) = ?$ Das wilde $\int d^3k$–Integral, welches hier zunächst steht, läßt sich noch auf ein gewöhnliches k–Integral herunter kochen. Insbesondere herrscht am Ursprung die Temperatur $T(\vec{0},t) = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^\infty dk\, \frac{\sin(kR)-kR\cos(kR)}{k}\, e^{-tDk^2}$ — richtig?



(c) Fortsetzung zur heißen Kugel. T sinkt und sinkt — auch am Ursprung. Dort (links unten in der Skizze) interessiere der führende Term der Langzeit–Asymptotik, d.h. $T(\vec{0},t\to\infty)\to ?$

(d) Für das (b)–Resultat schreiben wir jetzt $T(r,t)$, sowie $\partial_r T(r,t) =: T'(r,t)$. Bei $r=R$ sollte dieser Anstieg negativ sein und mit der Zeit abnehmen: $T'(R,t) = ?$
Challenge: Wie reduziert sich $T'(R,t\to 0)$ auf $-T_0/\sqrt{4\pi D t}$?

$2+1.5+1+1.5 =$ 6

75) Magnetostatik aus der Unterwelt

Die allgemeine Lösung $\vec{B} = \nabla\times\int d^3r'\,\frac{\vec{\jmath}\,(\vec{r}\,')}{\varepsilon_0 c^2\, 4\pi\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ hatten wir bei Theorem 3 nur verifiziert. Jetzt leiten wir sie her. Zuerst lösen wir die magnetostatischen Fourier–Unterwelt–Gleichungen (gleich hinschreiben!) nach $\widetilde{\vec{B}}(\vec{k})$ auf. Der Aufstieg in die Oberwelt beschert uns $\vec{B}(\vec{r})$. Bis hierher galt $\widetilde{\vec{\jmath}}(\vec{k})$ als bekannt. Aber jetzt will $\vec{\jmath}\,(\vec{r})$ ins Spiel kommen. Das Stückchen bis zum Wunschresultat schaffen wir nun auch noch. 2.5

Viel Glück in den höheren Semestern ! — Und später übernehmen Sie dann den Laden („Der Sohn ist älter als der Vater“).

Aber am Freitag gibts noch ein $\boxed{\text{P 25}}$–Blatt, und so weiter.