34) Van–der–Waals am kritischen Punkt

(a) Die Modell–Zustandsgleichung $p = \frac{T}{v-b} - \frac{a}{v^2}$ ist gut geeignet, jene beiden Gleichungen explizit zu machen, die den kritischen Punkt festlegen (Abkürzung $v - b =: (\ )$). Wir können sie auch lösen, am besten in der Reihenfolge $v_c = ?\quad T_c = ?\quad p_c = ?$

(b) Bei Übergang zu dimensionslosen Variablen per $v =: v_c\, v^{\text{neu}}$, $T =: T_c\, T^{\text{neu}}$, $p =: p_c\, p^{\text{neu}}$ geschieht ein Wunder. Alle VdW–Gase (zu verschiedensten a, b) folgen ein und derselben Gleichung, nämlich (den Index „neu" nun weglassend)

$$p = \frac{n_1\, T}{n_2\, v - 1} - \frac{n_2}{v^2} \qquad (*)$$

mit welchen natürlichen Zahlen n_1 und n_2 ?

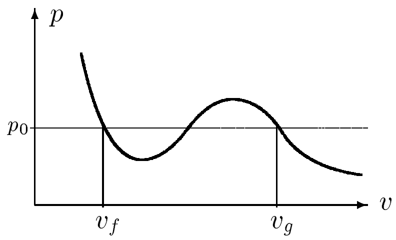
(c) Die kritischen Daten sind jetzt 1,1,1. Weil für (d) benötigt, setzen wir $T = 1 + \eta$, $v = 1 + \varepsilon$ und entwickeln p um den krtitischen Punkt bis mit $\mathcal{O}(\varepsilon^3,\ \eta\varepsilon^2,\ \eta^2\varepsilon,\ \eta^3)$.

(d) Zwei kritische Exponenten. Auf der kritischen Isothermen ($T \equiv 1$) definiert man δ durch $(1-p) \sim (v-1)^\delta$. Und weil das Gas mit wachsender Tendenz zur Verflüssigung immer leichter komprimierbar wird, interessieren Konstante und Exponent γ in $\kappa_T^{-1} = \text{const} \cdot (T-1)^\gamma$. Welche Werte δ und γ haben also Van–der–Waals–Gase ?

$1 + .5 + 1.5 + 2 =$ 5

35) Maxwell–Konstruktion

Um sie einmal konkret durchzuführen kommt uns die Zustandsgleichung $(*)$ aus Übung 34) (b) sehr gelegen. Die grafische Konstruktion legt zunächst nahe, zu vorgegebenem T drei Gleichungen für p_0 , v_f , v_g aufzuschreiben. Jedoch



(a) hier sind es nur noch zwei (für v_f und v_g):

$$\int_{v_f}^{v_g} dv\ v\ \partial_v\, p(v) = 0 \qquad (1) \qquad \text{und} \qquad p(v_f) = p(v_g) \qquad (2)$$

Weshalb geht das in Ordnung ? Wie macht $(*)$ die Gleichungen (1), (2) konkret ?

(b) Weil es hoffnungslos ist, die (a)–Gleichungen lösen zu wollen, gehen wir doch wieder an den kritischen Punkt heran: $T = 1 - \tau$. Es ist jetzt etwas frech, die v–Abweichungen symmetrisch anzusetzen: $v_f = 1 - \Delta$, $v_g = 1 + \Delta$ („Intuition"!). Damit gibt (2) einen Zusammenhang von τ mit Δ und wir erhalten einen dritten kritischen Exponenten ($\beta = ?$), welcher durch $(v_g - v_f) \sim (1-T)^\beta$ definiert ist.

(Aus einer ganz anderen mean–field–Betrachtung sollte Ihnen β recht bekannt vorkommen. Daß $p_0 = 1 - \Delta^2$ ist und daß (1) mit der unterstellten Symmetrie bis mit Δ^3 erfüllt ist, das kontrollieren wir dann mal im März, nicht wahr. Übrigens ist $(v_g - v_f)$ als der Ordnungsparameter des Flüssig–Gas–Überganges anzusehen.)

$2 + 2 =$ 4

36) Wechselstrom–Leitfähigkeit

Wenn sich das elektrische Feld zeitlich ändert, $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t) = \Re e \left(\vec{E}_0\, e^{-i\omega t} \right)$, dann behält natürlich die linearisierte Boltzmann–Gleichung ihren $\dot{f}$–Term :

$$\dot{f}_k = -q\, f_k^{0\prime\varepsilon}\ \vec{v}_k \cdot \vec{E}(t) - (f_k - f_k^0)/\tau \quad .$$

Setzen wir $f - f^0 =: y$, so wird der Dgl–Typ klar. Lösen ! Einige Zeit nach dem Einschwingen ist nur noch ein $y = \Re e\,(\ldots\, e^{-i\omega t})$ übrig geblieben. Die „komplexe Leitfähigkeit" $\sigma(\omega)$ wird durch $\vec{j}(t) = \Re e(\,\sigma(\omega)\,\vec{E}_0\, e^{-i\omega t}\,)$ definiert. Wir erhalten $\sigma(\omega)$ als Produkt aus $\sigma(0)$ mit einem ω–abhängigen Bruch. (Für $\sigma(0)$ möge es hier genügen, einen später noch weiter auszuwertenden Ausdruck zu identifizieren.)
Auf welchen asymptotisch führenden Term reduziert sich $\sigma(\omega)$ bei $\omega \to \infty$? 3