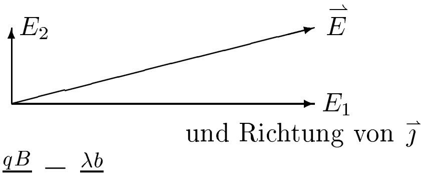
37) Hall–Konstante

Auch im homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_3$ ist die linearisierte und relaxationszeit–genäherte Boltzmann–Gleichung (ohne $\nabla T, \nabla\mu$, aber mit $\vec{E} \perp \vec{B}$) streng lösbar.

(a) Für die jetzt irgendwie „schief orientierte“ Funktion ϕ_k (in $f_k = f_k^0 - f_k^{0\prime\varepsilon}\,\phi_k$) finden wir einen einfachen Ansatz. Löst er die Boltzmann–Gleichung ? $\phi_k = ?$
(Eventuell hilfreiche Abkürzungen : $\lambda := \hbar q\tau/m$, $\vec{b} := \vec{B}/\hbar$)

(b) Die Leitfähigkeit wird nun ein Tensor: $\vec{\jmath} = \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{E}$.
Ein paar seiner Elemente seien verraten :



$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\sigma_0}{1+\omega^2\tau^2}\begin{pmatrix} ? & -\omega\tau & 0 \\ ? & ? & 0 \\ ? & ? & 1+\omega^2\tau^2 \end{pmatrix} , \ \sigma_0 := \frac{q^2 n\tau}{m} , \ \omega := \frac{qB}{m} = \frac{\lambda b}{\tau} .$$

(c) Mit Blick auf die Skizze wird die Hall–Konstante R_H durch $E_2 = j_1\, R_H\, B$ definiert. Wir geben sie explizit an.
(R_H kann also zwischen elektronischer und Löcherleitung unterscheiden.) $2+1+1 =$ 4

38) Restwiderstand

Nachdem die Phononen ausgefroren sind (ρ–Beitrag $\sim T^5$) bleibt den N ebenwelligen Elektronen eines Metalls (PBC–Volumen V) nur noch die Streuung an wenigen (N_i) *impurities* mit Potential $V_i = \frac{Q}{r}e^{-\kappa r}$. Der spezifische Widerstand $R\cdot\frac{F}{L} = \rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{q^2 n}\,\frac{1}{\tau}$ soll explizit erhalten werden.

$$\frac{1}{\tau} = \frac{V}{8\pi^3}\int d^3k'\;\Gamma(\vec{k},\vec{k}')\,[1-\cos(\vartheta)]\Big|_{|\vec{k}|=k_F}$$
$$\Gamma(\vec{k},\vec{k}') = N_i\,\frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle\vec{k}\,|V_i|\,\vec{k}'\rangle\right|^2\delta(\varepsilon_k-\varepsilon_{k'})$$
$$\vartheta = \angle(\vec{k},\vec{k}') ,\ \langle\vec{r}\,|\,\vec{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\vec{r}} ,\ \varepsilon_k = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$$

Die Startlöcher (nebenstehend) sind schon gegraben, und sogar das Resultat

$$\rho = \frac{N_i}{N}\,\frac{2m^2}{3\pi\hbar^3}\,\frac{Q^2}{q^2 n}\,f\!\left(\frac{4k_F^2}{\kappa^2}\right)$$

wurde bereits vorgezeigt.

Wie kommt es heraus ? Wie sieht die dimensionslose Funktion $f(x)$ aus ?
(Große Gefahr trivialer Fehler: langsam ! $f(x) = \ln(1+...) -$ ein Bruch.) 4

39) Geschwindigkeit eines Bloch–Elektrons

Mit Blick auf die Theorie IV im kommenden Sommer lassen wir dieses Hausübungsprogramm rein quantenmechanisch zu Ende gehen. Bekanntlich können Bandstrukturen ohne weiteres in Transport–Rechnungen einbezogen werden. So genügt es zu wissen, daß $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})$ mit $V(\vec{r}) = V(\vec{r}+\vec{R})$ die Eigenfunktionen $\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\vec{r}}u_{\vec{k},\nu}(\vec{r})$ mit $u(\vec{r}) = u(\vec{r}+\vec{R})$ zu Eigenwerten $\varepsilon_{\vec{k},\nu}$ hat, um beispielsweise

$$\left\langle\frac{\vec{p}}{m}\right\rangle_{\vec{k},\nu} = \frac{1}{\hbar}\,\nabla_k\,\varepsilon_{\vec{k},\nu}$$

herzuleiten. Tun !
(Ideen müßte man haben. Wie ist u eigentlich normiert ? Der Operator $h := e^{-i\vec{k}\vec{r}}He^{i\vec{k}\vec{r}}$ könnte helfen: (a) $hu = ?$, (b) h e–frei schreiben, (c) $\nabla_k h = ?$ Genug ?) 4