4) Ortho– und Para–Helium

Auf M Plätze an einer Festkörperoberfläche verteilen sich $N = P + O$ Heliumatome, und zwar samt ihrer Elektronenhüllen (Mehrfachbesetzung verboten). P von ihnen sind im Grundzustand und O im tiefsten Triplett–Zustand.

Welchen Entartungsgrad g hat das System aufgrund der Zwei–Sorten–Platz–Kombinatorik ? Stirling entlockt nun der Konfigurations–Entropie S_0 (exakt = ?) ihren extensiven Anteil $S_0^{\text{ex}} = ?$ (natürlich so aufzuschreiben, daß man die Extensivität s i e h t .)
Nach einer Stunde haben sich alle Ortho–Heliums in den Grundzustand begeben. Wir bilden die Differenz $\Delta S = S_0^{\text{nachher}} - S_0^{\text{vorher}}$, und zwar zuerst exakt, dann mit Stirling. Welches Vorzeichen hat ΔS^{ex} ? – Bei Von–alleine–Vorgängen kann S nur zunehmen. Weshalb läßt sich mit obigem „falschen“ Vorzeichen dennoch gut leben ? 3

5) Gittergas : T und p

Wir kennen den extensiven Anteil der mikrokanonischen Entropie

$$S(E,V,N) = N\Big\{(r+1)\ln(r+1) - r\ln(r)\Big\} + 3N\Big\{(\epsilon+1)\ln(\epsilon+1) - \epsilon\ln(\epsilon)\Big\}$$
$$=: S_0 + S_1 \quad \text{mit} \quad r := \frac{M}{N} - 1 = \frac{V}{Nv} - 1 \quad \text{und} \quad \epsilon := \frac{E}{3N\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$

von N Protonen, verteilt auf M harmonische Mulden, aus der Vorlesung.

(a) Welche Temperatur T hat das System zu gegebenen E, V, N ? Auflösen nach ϵ gibt $E(T,V,N)$, und hiermit läßt sich $S(T,V,N)$ bilden.
((Resultat bitte so schreiben : $S = S_0 + 3N\left[\frac{\beta\hbar\omega}{e-1} - \ln(1-?)\right]$ mit Abkürzung $e := e^{\beta\hbar\omega}$.
Übrigens – Test im Kopf – bei $T \to 0$ muß E gegen $\frac{3}{2}\hbar\omega N$ gehen und S gegen S_0 .))
Das System hat $3N$ oszillatorische Freiheitsgrade. Wieviele T pro Freiheitsgrad („$\frac{1}{2}$“ ist halt falsch) bekommt hier die Energie E bei $T \to \infty$?

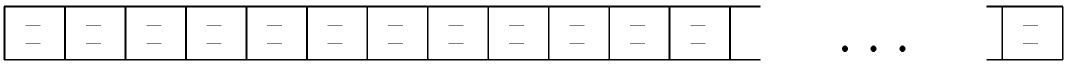
(b) Die mittlere Energie $E_{\text{osz}}(T)$, welche ein einzelner 1D harmonischer Oszillator bei Temperatur T aufnimmt, läßt sich aus dem (a)–Resultat leicht ablesen, ebenso seine Entropie $S_{\text{osz}}(T)$. Aus $E_{\text{osz}} - TS_{\text{osz}} =: -T\ln(Z_{\text{osz}})$ folgt $Z_{\text{osz}}(T) = ?$
(Das war die mikrokanonische Herleitung dreier typisch kanonischer Resultate !)

(c) Auch den Druck p des Gittergases, aus $S(E,V,N)$ folgend, geben wir als Funktion von T , V , N an. $p = p(T,V,N)$ nennt man „Zustandsgleichung“. Im Grenzfall Zellenvolumen $v \to 0$ vereinfacht sie sich stark und nimmt (weil wegen per–def.–Null–Wechselwirkung zwischen den Mulden das Pauli-Prinzip außer Kraft bleibt) eine hübsch einfache Form an : $pV = ?$

$3.5 + 1 + 1.5 =$ 6

6) $\frac{1}{2}$–Spins mikrokanonisch

Sehr viele (N) Teilsysteme mit je $H = \frac{1}{2}\,\epsilon\,(1 + \sigma^z)$ werden zu einem großen System zusammengesetzt. Das Spektrum ist nicht nach oben offen: ein „ungesundes“ Wärmebad.



Zu vorgegebener Energie $E = n\epsilon$ mit $0 \leqslant n \leqslant N$ bilden wir die mikrokanonische Entropie S , ermitteln ihren extensiven Anteil S^{ex} , schreiben S^{ex}/N als Funktion von $\eta := n/N = E/(N\epsilon)$ und skizzieren den Verlauf dieser Funktion über η . Als extensive Größe kann T (außer von ϵ) nur von η abhängen: $T(\eta) = ?$ Oberhalb welchen η–Wertes η_∞ wird die Temperatur negativ ? Der Blick auf eine Skizze T über η (tun!) zeigt, daß nichtsdestotrotz T fast überall mit wachsender Energie zunimmt. 3