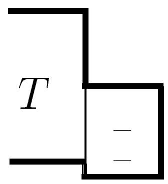
7) $\frac{1}{2}$–Spin kanonisch



In Kontakt mit einem Wärmebad (T) steht ein System mit $H = \frac{1}{2}\epsilon\,(1+\sigma^z)$ (Spin $\frac{1}{2}$ im Magnetfeld $B\vec{e}_3$). Es hat kein V, und N ist 1 .

Wir ermitteln die Zustandssumme $Z(T)$, die (mittlere) Energie $E_k(T)$ und die Entropie $S_k(T)$.

Diese kanonischen Resultate sollten sich auch auf „Mikrokanonischem Wege“ ergeben. Dazu starten wir beim Resultat von Übung 6), $S^{\rm ex} = -N\,[\,\eta\ln(\eta) + (1-\eta)\ln(1-\eta)\,]$, $\eta = E/(N\epsilon)$, und extrahieren $E_k(T)$ und $S_k(T)$ erneut.

Eines ist jetzt anders als bei Übung 6) : am Ofen erreicht die Energie (pro Kasten) nur höchstens welchen Wert ? 4

8) Kreisring am Ofen

Ein Teilchen (m_0) mit Spin $\frac{1}{2}$ (Elektron oder Proton oder Neutron) sei an einen Kreisring (R, $m_0R^2 = \theta$) gebunden (diesmal kein Magnetfeld, Entartungsgrade ⚡) und einem Wärmebad (T) ausgesetzt. (Nebenbei: PBC in 1D $\equiv$ schwanzgebissene x–Achse $\equiv$ Kreisring)

(a) Wie sieht die Zustandssumme Z aus ? Welchen führenden Term bekommt Z bei $T\to\infty$? ($\sum \to \int$ und auswerten) und wieviele T dieses einen (translatorischen!) Freiheitsgrades bekommt dabei die Energie ?

(b) Um eine typische Temperatur T_0 anzugeben, unterhalb welcher obiger Hochtemperaturlimes ganz falsch wird, setzen wir den Exponenten = 1 (und zwar jenen zur Quantenzahl $m = 1$) : $T_0 = ?$

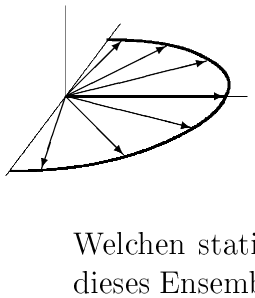
Welchen Zahlenwert in Grad Kelvin mag T_0 bekommen, wenn $R = 1$cm ist und wenn zum einen ein Proton, zum anderen ein Elektron den Ring besiedelt ?

(($\hbar = 1.05\cdot 10^{-34}$Js , $k_B = 1.38\cdot 10^{-23}$J/K , $m_0^{\rm Proton} = 1.7\cdot 10^{-27}$kg , $m_0^{\rm Elektron} = 9.1\cdot 10^{-31}$kg ,
— per Hand oder Rechner, aber Kommastellen im T_0–Resultat verbieten sich !))

(c) *Aktivierungsverhalten.* Bei tiefer Temperatur ist nur noch die unterste Energielücke von Bedeutung. Wir reduzieren Z auf 2 Terme, erhalten E_k (1 Term), die spezifische Wärme c (1 Term), F und S_k (2 Terme). Ob die beiden S_k–Terme auch mit der jeweils anderen S–Formel [$-\partial_T F$ bzw. $\beta(E-F)$] herauskommen ?!

$2 + 1.5 + 2.5 =$ 6

9) Spinstrahl und statistischer Operator



Die Einheitsvektoren $\vec{e} = (\,\cos(\varphi)\,,\,\sin(\varphi)\,,\,0\,)$ der Spins eines Neutronenstrahls (ganz egal in welche Richtung dieser weist) liegen kontinuierlich wie ein Fächer in der rechten xy–Halbebene: $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist $P(\varphi) \equiv \frac{1}{\pi}$. Der obigem $\vec{e}$ zugeordnete Spinor $\begin{pmatrix} \langle +|\varphi\rangle \\ \langle -|\varphi\rangle \end{pmatrix}$ ist aus der Vorlesung bekannt.

Welchen statistischen Operator ρ (am besten $\langle\sigma|\rho|\sigma'\rangle$ als $2*2$–Matrix angeben) hat dieses Ensemble ? Sind seine drei definierenden Eigenschaften erfüllt ? Welche Entropie S steht für die Spin–Unordnung des Strahls ? 2