13) „Ideales Gas“ großkanonisch

Wenn ein kanonisches Z die Struktur $(Z_1)^N/N!$ hat, so läßt sich die große Zustandssumme $Z_{\rm gr}$ sofort exakt angeben und natürlich auch das Potential Ω.
Erst jetzt erinnern wir uns der Übung 11), setzen $Z_1 = V/\lambda^3 = VT^{3/2}\alpha$ (wobei $\alpha := [\,m/(2\pi\hbar^2)\,]^{3/2}$) und bilden den „großkanonischen Gradienten“, sowie $E(T,V,\mu)$. Auch die Auflösung nach $\mu(T,V,N)$ gelingt leicht. Jetzt wird spannend, ob wohl hiermit Energie $E(T,V,N)$ und Druck $p(T,V,N)$ auf Bekanntes führen.
(Wenn man in jedem Resultat als Abkürzung Ω selbst verwendet – oh, dann wird es ja so kurz.) 3

14) Verteilungen aus Variationsrechnung

Nichts wisse man über einen Operator ρ, außer daß er im Hilbert–Raum eines gegebenen H operiert und auf 1 normiert ist ($\mathrm{Sp}(\rho) = 1$: erste Nebenbedingung). Doch, doch, man kann auch Operatoren variieren: $\rho \to \rho + \delta\rho$ (und sich z.B. Variation aller seiner Matrixelemente dabei denken).

(a) Die Entropie (natürlich ρ–isch geschrieben) soll maximiert werden unter der genannten Nebenbedingung und der zweiten, daß $\langle H \rangle$ einen vorgegebenen Wert E hat. Ob das Kanonik gibt ?

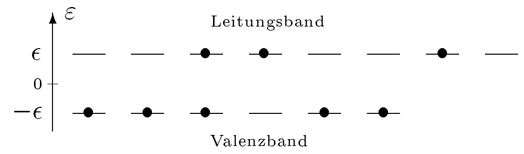
(b) Wie bei (a), aber eine dritte Nebenbedingung komme hinzu, nämlich daß auch die mittlere Teilchenzahl $\langle N_{\rm op} \rangle$ einen vorgegebenen Wert N habe.

(c) Jetzt soll $\Omega = E - TS - \mu N$ minimal werden unter Variation einer Zahlenfolge p_λ. Zuvor seien in Ω für E, S, N die drei „Trivialformeln“ eingesetzt.

(d) Wie bei (c), aber die Freie Energie $F = E - TS$ werde unter einer (welcher?) Nebenbedingung zum Minimum. (Sie haben soeben die vierte und die fünfte Herleitung der Fermi–Verteilung höchst selbst bewerkstelligt.) $2 + .5 + 1 + .5 =$ 4

15) Modell eines Halbleiters

Stark idealisierend reduzieren wir das Leitungsband eines Halbleiters auf g Zustände bei Energie ϵ und das Valenzband auf g' Zustände bei $-\epsilon$. Die Spin–Entartung der Elektronen ist bereits in g , g' enthalten.



(a) $N(T,\mu) =\ ?$ Wohin begibt sich N, wenn man (bei festem T) das chemische Potential μ nach $+\infty$ bzw. nach $-\infty$ laufen läßt ? Zu gegebenem N bestimmt sich μ. Aber wir stellen nur die (in $e^{-\beta\mu}$ quadratische) Gleichung bereit (Hauptnenner herüber, schöner schreiben, *nicht* lösen), nennen sie $(*)$ und bedenken, daß das Modell nur bei tiefer Temperatur einigermaßen sinnvoll ist.

(b) Reiner Halbleiter: $N = g'$. Vermutlich liegt μ nahe bei Null (Konsistenzannahme). T tief, $(*)$ nähern ! $\curvearrowright$ ein einfacher, in T linearer Ausdruck für $\mu(T, N{=}g') =\ ?$ Daraufhin, so wird behauptet, versammeln sich $N_+ = \sqrt{gg'}\, e^{-\beta\epsilon}$ Elektronen im Leitungsband. Stimmt das ?

(c) Dotierter Halbleiter: $N > g'$, d.h. $N = g' + \text{ü}$ (ü $=$ Überschuß). Vermutung zur μ–Lage, T tief, $(*)$ nähern ! $\curvearrowright$ $\mu(T, \text{ü}) =\ ?$ Nur wenn . . . (Ungleichung), sinkt μ mit wachsender Temperatur. Wie (Worte? Skizze?) läßt sich dies verstehen ?
$1.5 + 1.5 + 2 =$ 5

Eine „Konsistenzannahme“ ist eine Vermutung, die sich im Laufe weiterer Rechnung bestätigt oder als falsch erweist. Natürlich ist am Ende auch nachzusehen, ob sie berechtigt war. Es geht zu wie bei einem Ansatz. Nur Mut !