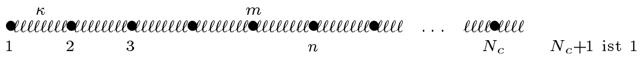
16) Lineare Kette am Ofen

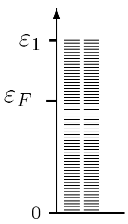


(a) Das Frequenzspektrum ω_k des skizzierten, langen (N_c groß) und bei $L = N_c\, a$ periodisch geschlossenen 1D Moleküls folgt aus klassischer Mechanik. Wir suchen einen Schnellweg. Die Bewegungsgleichung für den n–ten Atomkern (m) mit Koordinate $x_n^{\text{alt}}(t) = na + x_n(t)$ läßt sich unverzüglich zu Papier bringen. Wir denken an „laufende Flötentöne“, setzen $x_n \sim e^{ikna - i\omega_k t}$ an, und sind alsbald fertig: $\omega_k = ?$
Weshalb dürfen die k–Werte nicht über die Brillouin–Zone $(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\,]$ hinaus ? Welche Schallgeschwindigkeit c_S hat die Kette im akustischen Bereich ? c_S–Dimensionspropbe !
(Im folgenden verwenden wir natürlich c_S statt irgendwelchen κ–Krames.)

(b) In Debye's Filzlatschen ist es warm. Welche Energie $E(T)$ nimmt dort das Molekül auf ? ($k_D = ?$ Debye–Näherung, Debye–Temperatur $\theta = ?$) Selbst bei tiefer Temperatur bleibt ein Integral in $E(T)$ stehen. Wir lassen es wenigstens noch zu einer numerischen Reihe $\sum_{n=1} \frac{1}{?}$ werden. Aber deren Resultat $\frac{\pi^2}{6}$, na gut, das sei dem Bronstein mal geglaubt. Welchen führenden Tief–T–Term hat also die spezifische Wärme c_L der Kette ?

$2 + 3 =$ 5

17) Modell eines Metalls



N nicht–wechselwirkende Elektronen werden in das nebenstehende Zustände–Diagramm gefüllt : $\varepsilon_n = \alpha\, n$ $(n = 0, 1, \ldots, n_1 > N/2)$, wegen Spin je 2–fach entartet. (Wir stellen uns $\alpha \sim \frac{1}{V}$ vor, woraufhin sich bald zeigt, daß $\sum \to \int$ [tun!] den extensiven Anteil von N oder E präpariert.) Es interessiert u.a., wie es sich wohl auswirkt, wenn ein oberer Rand $\varepsilon_1 = \alpha\, n_1$ des Leitungsbandes die „Staubwolke“ beschränkt.

(a) Zuerst sei die Fermi–Energie ε_F notiert. In der N–μ–Beziehung versuchen wir, neben β, μ nur noch ε_1 und ε_F vorkommen zu lassen. Das Integral „geht“, die Auflösung nach μ ebenfalls. Das Resultat $\mu(T)$ heiße $(*)$. (gescheit aufschreiben!)

(b) Sei das Band zunächst nach oben offen : $\varepsilon_1 = \infty$. $(*)$ vereinfacht sich. Tief– und Hochtemperatur–Asymptotik von $\mu(T)$? Skizze μ über T ! Bei welcher Temperatur T_0 läuft μ durch Null ?

(c) Nun $\varepsilon_F < \varepsilon_1 < \infty$. Wir wissen etwas : wenn genau $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_F$, dann muß $\mu \equiv ?$ bleiben. Nicht wahr, auch $(*)$ besteht diesen Test. Wenn aber $\varepsilon_1 < 2\varepsilon_F$ ist (starke obere Beschränkung), wohin beginnt dann μ ab $T = 0$ zu wandern ?

(d) Spezifische Wärme des Metalls. Reuige Rückkehr zum symmetrischen Fall $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_F$. Welche Grundzustands–Energie E_0 hat das System ? Welches ε–Integral legt $E(T, V, \mu \equiv \ldots)$ fest ?

Die (zusätzliche) Energie E_{oben} der oberen Hälfte der Staubwolke können wir andererseits direkt zu Papier bringen (als $\int_{\varepsilon_F}^{2\varepsilon_F}$ über $(\varepsilon - \varepsilon_F)$–Portionen) und für tiefe Temperatur auswerten (Best. Integral benötigt ? Zitieren !). Die Energie ΔE der Staubwolke ist doppelt so groß, weil jedes Elektron aus seiner Spiegelbildposition bezüglich Fermikante angeregt wurde. Fertig: $E = E_0 + \Delta E = ?$ Spezifische Wärme $c_V = ?$

Auf die Form $E_0 + 2E_{\text{oben}}$ (noch Integrale enthaltend) muß auch (*challenge*) die oben bereitgestellte (und bislang ignorierte) $E(T, V, \mu)$–Formel gebracht werden können.

$2 + 1 + 1 + 2 =$ 6

18) c_V–Formel

Wir haben $c_V = \partial_T E(T, V, N)$ im Griff (Kanonik). Jemand (der nie etwas anderes als ex. im Hirn hatte) benutzt aber plötzlich $c_V = T\partial_T S(T, V, N)$. Darf er denn ? 1