19) Die $\boldsymbol{E}$–Anteile $\langle \boldsymbol{T} \rangle$ und $\langle \boldsymbol{V} \rangle$

Das Virialtheorem (hier eindimensional und für nur ein Teilchen) stellt via

$$0 = \langle E|\,[\,H\,,\,x\partial_x\,]\,|E\rangle = \langle E|\,\Big[-\tfrac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\,,\,x\partial_x\Big]\,|E\rangle = \ldots$$

einen Zusammenhang zwischen zwei quantenmechanischen Erwartungswerten her, welchen ? $(\,H|E\rangle = E|E\rangle$, keine Entartung, $H = T + V$, $T = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2$, $\langle A\rangle_E := \langle E|A|E\rangle$.) Ist überdies $V(x) = V_0\cdot(x/L)^n$, so wird daraus eine Beziehung zwischen $\langle T\rangle_E$ und $\langle V\rangle_E$. Wie gelangt man damit bis zu den kanonischen Mitteln $\langle T\rangle = \mathrm{Sp}(\rho_{\mathrm{k.}}T) = \alpha\, E_{\mathrm{k.}}$ und $\langle V\rangle = \mathrm{Sp}(\rho_{\mathrm{k.}}V) = \gamma\, E_{\mathrm{k.}}$? Hierbei hängen α , γ nur von n ab, nämlich je wie ? Zum harmonischen Oszillator nehmen α, γ die gewünschten Werte an. Aber auch zu großem n (Skizze V über x !) sind wir mit $\alpha \to ?$ und $\gamma \to ?$ sehr zufrieden. 3

20) Sommerfeld–Entwicklung

Die elektronische Zustandsdichte $z(\varepsilon)$ eines Metalls sei irgendwoher bekannt $(z \sim V)$. Die „Trivialformeln“ für $N(T,V,N)$ und $E(T,V,N)$ lauten dann bekanntlich

$$\left.\begin{matrix} N \\ E \end{matrix}\right\} = T\int dx\, \left\{\begin{matrix} z(\mu + Tx) \\ (\mu+Tx)\, z(\mu+Tx) \end{matrix}\right\} f(x) ,$$

wobei $f(x) := \frac{1}{e^x+1}$. Um sie bei tiefer Temperatur studieren (insbesondere z nach Tx entwickeln) zu können, sollten zuerst die x–Werte durch $-f'(x)$ klein gehalten werden: partielle Integration, neben f' auch $\zeta(x) := \int_0^x dy\; z(\mu + Ty)$ ins Spiel bringend. Schließlich kam Sommerfeld beim unten angegebenen μ–Resultat an. Zu E war er dann superschlau, erklärte einfach $\varepsilon\, z(\varepsilon)$ zu einer neuen Zustandsdichte und ging damit die N–Rechnung noch einmal kurz durch. Hatte er sich mit

$$\mu(T,V,N) = \varepsilon_F - \frac{\pi^2}{6}\frac{z'(\varepsilon_F)}{z(\varepsilon_F)}\,T^2 \qquad \text{und} \qquad E(T,V,N) = E_0 + \frac{\pi^2}{6} z(\varepsilon_F)\,T^2$$

auch wirklich nicht vertan ? 5

21) Weißer Zwerg

In allerlei Sternen ist die Materie so stark komprimiert, daß die Elektronen (m_e) die Kerne nur noch als homogenen positiven Ladungs–Hintergrund wahrnehmen und ihrerseits ein $\approx$ideales Fermigas bilden. „Leichtere“ weiße Zwerge sind nicht–relativistisch. Sie sind heiß. Die Fermienergie ε_F liegt jedoch so hoch ($\varepsilon_F \gg T$), daß im folgenden sogar bei $T \approx 0$ gearbeitet werden darf.

(a) Wir denken uns ein PBC–Volumen V inmitten des Sterns. Seine N Elektronen füllen die *levels* $\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}$ zu einer Kugel (k_F) auf. Aus Teilchendichte $n := N/V$ und Energiedichte $\varepsilon := E/V$ (je proportional zu einer k_F–Potenz) erhalten wir $\varepsilon = \alpha\, n^\lambda$ (mit $\alpha = ?$ und $\lambda = 5/3$) und auch den Druck p des Systems (übrigens: $F(T\!=\!0) = E$).

(b) Man kennt die Masse M des Sterns und die mittlere Kernmasse m_K pro Elektron (Ladungsneutralität ! somit $n = M/(Vm_K)$, jetzt V = Volumen des kugelförmigen Sterns und R sein Radius). Damit drücken wir den Elektronen–Beitrag E_{el} zur Gesamtenergie durch R, M, α, m_K aus. Bei $\approx$konstanter Massendichte trägt Gravitation mit $E_{\mathrm{grav}} = -3\gamma M^2/(5R)$ bei (s. $\boxed{\text{P 7}}$), und Minimieren von $E_{\mathrm{el}} + E_{\mathrm{grav}}$ gibt nun den Radius R_0 des Sterns. (($R_0 = \frac{5}{(6\pi^2)^{1/3}}\,\frac{\alpha}{\gamma}\,(\frac{1}{m_K^5 M})^{1/3}$ — stimmt das ?)) $2 + 2 =$ 4

The end product of stellar evolution is a white dwarf, a neutron star or a black hole. A white dwarf is held up against gravitational collapse by the degeneracy pressure of electrons, while the same task is accomplished by the degeneracy pressure of neutrons for a neutron star. ... In a white dwarf the pressure of electrons dominates the pressure of atomic nuclei. On the other hand, the mass density of baryons dominates the total energy density. ...
[J.I. Kapusta, *Finite-temperature field theory*, Cambridge UP. 1989]