22) BE–Kondensation in zwei Dimensionen ?

N nicht–wechselwirkende Bosonen (m) leben auf einer PBC–Fläche F .

(a) Ob erneut $\sum \to \int$ (o h n e Grundzustands–Sonderbehandlung) in eine Katastrophe führt, wird sich schon zeigen, denken wir uns zunächst, bilden $N(T, F, \mu)$, integrieren aus, nennen $\frac{2\pi\hbar^2}{mF} =: T_0$, lösen nach $\mu(T, F, N)$ auf und skizzieren μ über T . — Da nichts Übles zu bemerken war, gibt es also (vorläufige Antwort) in 2D keine BE–Kondensation.

(b) Aber es könnte ja die Besetzung N_0 des Grundzustandes dennoch makroskopisch werden. Nach Abspalten von N_0 entsteht eine Gleichung, aus der μ zugunsten von N_0 eliminiert werden kann. Hat man $N(T, T_0, N_0)$, so auch $T(N, T_0, N_0) = ?$

(c) Das T–Resultat von (b) hat seine Tücken, sobald man es skizzieren will. N_0 läuft von 0 bis N . Wir denken an $N \sim 10^{14}$ $(= (10^{21})^{2/3}$, 2D!) und $T_0 \sim 10^{-14}$K, lassen ab $c = 1$ die Konzentration $c := N_0/N$ abnehmen und ordnen Werte von $\tau := T/(NT_0)$ zu. „Fast BE !“ zeigt nun eine Handskizze von c über τ . Bei etwa welcher Temperatur τ_0 liegt der Beinahe–Knick der Kurve ?

(d) Weiche Knie: Ob etwa auch N_1 aus dem Kontinuum abzuspalten war ? Wir geben dem ersten angeregten (nicht entarteten) Zustand die Energie T_0 , setzen im Iterations–Sinne Bekanntes in die N_1–Formel ein und sehen uns N_1/N_0 im Kondensat–Bereich $\frac{1}{10}N < N_0 < N$ wenigstens mal an (*comment ?!*).

$2 + 2 + 2 + 2 =$ 8

23) Druck $\sim$ Energiedichte

Bei Behandlung der Paarerzeugung war erstaunlicherweise $p = \frac{1}{3}\, E/V$ ganz ohne Integral–Auswertung herausgekommen. Ob da „mehr drin“ ist ?
Wir drehen den Spieß um und verlangen, daß $p = \zeta\, E/V$ gelte, und zwar für alle β , μ eines idealen Spin–$\frac{1}{2}$–Fermisystems. Welche Dgl für die (ab $\varepsilon = 0$ Werte bekommende) Zustandsdichte $z(\varepsilon)$ ist die Folge ? Welche Lösung hat sie ? Kommt das ultra–relativistische $\zeta = \frac{1}{3}$ wieder heraus ? Und welche ζ–Werte ergeben sich nicht–relativistisch in 1D, in 2D und in 3D ?

(Weil nur gewisse Potenzen abzulesen sind, werden Sie es auch in 1D, 2D automatisch richtig machen. Es spielt hier keine Rolle, daß p in 1D eine Kraft ist und in 2D eine Kraft pro Länge des Seitenrandes.) 3

24) Relativistisches $z(\varepsilon)$

Auf seinem heißen Stern an anderes gewöhnt, hört ein Außerirdischer erstmals davon, daß die Terraner bei ihrer kalten Metallphysik mit Zustandsdichte arbeiten. Er formuliert erst einmal die Paarerzeugung (aus Vakuum: $\mu \equiv 0$) entsprechend um, notiert sich für $\varepsilon > mc^2$ das zugehörige $z_{\text{relativistisch}}(\varepsilon) = ?$ und müht sich nun damit ab, daraus näherungsweise jenes verdammte $\sqrt{\varepsilon}$–Resultat (s. $\boxed{\text{P7}}$, 2)) des irdischen Alltags zu gewinnen. Helfen Sie ihm doch mal ! 1

. . . Jede der oben erwähnten Schwierigkeiten hätte mit geringer Anstrengung überwunden werden können. Die ersten drei Minuten sind uns jedoch zeitlich so fern, und die Temperatur– und Dichteverhältnisse sind so ungewöhnlich, daß es uns ein wenig widerstrebt, unsere gewöhnlichen Theorien der statistischen Mechanik und der Kernphysik darauf anzuwenden. . . . So etwas geschieht oft in der Physik : unser Fehler ist nicht, daß wir unsere Theorien zu ernst nehmen, sondern daß wir sie nicht ernst genug nehmen. Man kann sich stets nur schwerlich vorstellen, daß die Zahlen und Gleichungen, mit denen wir an unseren Schreibtischen spielen, etwas mit der wirklichen Welt zu tun haben. . . .
[Steven Weinberg „Die ersten drei Minuten“, Piper München 1997, am Ende von Kap.VI]