Präsenzübung 1

1) Zwei Würfel im Becher. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p fällt mindestens eine Sechs ?

2) Aus einem Topf, der 3 grüne und 4 braune Erbsen enthält, darf man sich (mit verbundenen Augen) zwei herausgreifen (erst eine, dann die andere). Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beide grün ?

3) Zahlenlotto : 6 braune im 49–Erbsen–Topf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_0 hat man *keinen* Richtigen ? Und mit welcher (p_1) einen Einer ? Trifft nun die allgemeine Behauptung $p_\nu = \binom{6}{\nu}\binom{49-6}{6-\nu}\Big/\binom{49}{6}$, ν Richtige zu haben, in beiden Fällen zu ?

4) Münzwurf–Ensemble, $S = -p\ln(p) - (1-p)\ln(1-p)$ mit $p = \frac{1}{2}(1+\varepsilon)$, $\varepsilon := e^{-2\lambda t}$. Welchen führenden Term hat die Langzeit–Asymptotik von $[\,S - \ln(2)\,]$?

5) Wir leben in 3D. Wie ergibt sich der Kreisring–Hamiltonian, indem man zu $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ zwei enge und hohe Potentiale $U(z)$ und $U(\rho - R)$ hinzufügt und dann separiert ?

6) Landau levels. Geladenes Teilchen (m, q) im homogenen Magnetfeld $(0, 0, B)$. Zu $H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2$ und in „linearer Eichung“ $\vec{A} = (0, Bx, 0)$ ist $H\varphi = E\varphi$ mittels Separationsansatz lösbar. $E_{\text{Quantenzahlen ?}}$ Skizze E über Ebene der beiden kontinuierlichen Quantenzahlen — so daß man die Entartungsverhältnisse erkennt.
Nebenbei: wie kommt zum H–Atom ein $\vec{L}\,\vec{B}$–Term in den Hamilton–Operator ?

7) Stirling : ist jeder der folgenden Schritte nachvollziehbar ? (zuguterletzt sogar Kopf ?) :
$N! = \int_0^\infty dt\; t^N e^{-t} = \int_{-N}^\infty dt\; e^{-(t+N)+N\ln(t+N)} =: N^N e^{-N}\sqrt{N}\,J$ mit
$J = \sqrt{N}\int_{-1}^\infty dt\; e^{-Nf(t)}$, $f = t - \ln(1+t)$. f wird minimal bei $t=0$ (und dort Null).
$f = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 - \;\dots$, $e^{-Nf} = e^{-\frac{N}{2}t^2}\left(1 + \frac{N}{3}t^3 - \frac{N}{4}t^4 + \dots\right)$. t^3 entfällt unter $\int$.
$J = \sqrt{2}\int_{-\sqrt{\frac{N}{2}}}^\infty dt\; e^{-t^2}\;[\,1 + O(t^4/N)\,] = \sqrt{2\pi}\;[\,1 + O(1/N)\,]$ qed. (Nach [Ki] Anhang A).