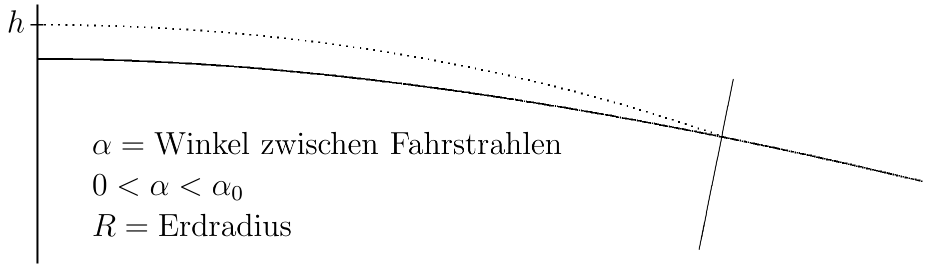
Hannover, 22. 12. 2008

Weiter Wurf nahe Erdoberfläche

In geringer Höhe h über dem Erdboden wird eine Gewehrkugel (m) mit großer Geschwindigkeit (v_0) horizontal abgeschossen. Es interessiert, welchen Einfluß die Richtungsänderung der Erdanziehung hat.



m läuft auf einer Kepler–Ellipse, beginnend am Erdmitte–fernsten Punkt (Aphel). In der üblichen Perihel–bezogenen Polarkoordinaten–Darstellung für $r(\varphi)$ setzen wir darum $\varphi = \pi - \alpha$:

$$r = R + y = \frac{p}{1 - \epsilon\,\cos(\alpha)} \quad , \quad \dot{\alpha} = \frac{L}{m\,r^2} \quad . \tag{W.1}$$

Ersichtlich ist y die momentane Höhe über der Erdoberfläche (keine kartesische Koordinate also). (Übrigens läßt sich auch $\partial_\alpha t = r^2 m/L$ integrieren, dann allerdings nicht nach α auflösen.)

Vorgegeben seien die Höhe h bei Abschuß und der Winkel α_0 bei Aufschlag. Durch diese beiden Daten lassen sich die Parameter p und ϵ ausdrücken:

$$\epsilon = \frac{h}{R\,(1-c_0)+h} \quad , \quad p = \frac{(R+h)\,R\,(1-c_0)}{R\,(1-c_0)+h} \qquad \text{wobei } \; c_0 := \cos(\alpha_0) \quad . \tag{W.2}$$

Damit, sowie mit $c := \cos(\alpha)$, bekommt (W.1) die Gestalt

$$y = -R + \frac{(R+h)\,R(1-c_0)}{R\,(1-c_0)+h\,(1-c)} \; = \; h\left[1 - \frac{(R+h)\,(1-c)}{R\,(1-c_0)+h\,(1-c)}\right] \quad . \tag{W.3}$$

Beide Ausdrücke zeigen schön, daß $\alpha = 0$ auf $y = h$ führt und $\alpha = \alpha_0$ auf $y = 0$. Wie sich $1 - c_0$ durch v_0 festlegt, ergibt sich per Gleichsetzen von p aus (W.2) mit der beim (W.1)–Herleiten erfolgten Abkürzung $p := L^2/(\gamma m^2 M)$, wobei hier $L = m(R+h)v_0$ ist.

Bis hierher waren keine Näherungen im Spiel. Erst jetzt kommen wir zum eigentlichen Problem: h sei winzig, $h \lll R$. Nichts spricht dagegen, in der eckigen Klammer in (W.3) sowie in $(\text{W.1})_{\text{rechte Gleichung}}$ schlicht $h = 0$ zu setzen, **ohne** dabei den α–Bereich einzuengen:

$$y \;=\; h\left[1 - \frac{(1-c)}{(1-c_0)}\right] \quad , \quad \dot{\alpha} = \frac{L}{m\,R^2} = \frac{v_0}{R} \quad . \tag{W.4}$$

Sogar $\alpha_0 = \pi/2$ scheint noch Sinn zu machen. Erst wenn wir überdies „in Hannover“ bleiben und auch noch $\alpha \ll 1$ betrachten, landen wir mit $y = h\,[\,1 - \alpha^2/\alpha_0^2\,] = h\,[\,1 - t^2/t_{\text{end}}^2\,]$ bei der gewöhnlichen Wurfparabel.

Das Resultat (W.4) ist jedoch viel besser! Effekte der Erde–Rundheit und der Kraft–Richtungsänderung sind in (W.4) enthalten. Setzen wir ruhig mal $\alpha_0 = \pi/2$ (und schaufeln unten, d.h. in Amerika einen Graben), dann wird $y = h\,\cos(\alpha)$ und m kommt beim Gewehr wieder an. Es ist alles in Ordnung.

(hschulz@itp.uni-hannover.de)