Delta–Funktion

Definierende Eigenschaft : $\int dx\ \delta(x-x_0)\, f(x) \;=\; f(x_0)$

Darstellungen :

$$\delta(x) = \frac{1}{2\,\varepsilon} \quad \text{für} \quad -\varepsilon < x < \varepsilon \quad \text{und 0 sonst}$$

$$\delta(x) = \partial_x \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x/\varepsilon}} = -\partial_x \frac{1}{\mathrm{e}^{x/\varepsilon}+1}$$

$$\delta(x) = \frac{\varepsilon}{\pi x^2} \sin^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad , \quad \delta(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon^2}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\ \cos(kx) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\ \mathrm{e}^{ikx}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int dk\ \mathrm{e}^{ikx-\varepsilon|k|} = \frac{1}{2\pi} \int dk\ \mathrm{e}^{ikx} \left(\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|}\right)$$

allgemein : $\delta(x) = \frac{1}{\varepsilon J}\, g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ mit $J := \int dx\ g(x)$

Formelsammlung :

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad , \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad , \quad \partial_x\, \theta(x) = \delta(x)$$

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}\Big(\delta(x-a)+\delta(x+a)\Big) \quad , \quad \delta(f(x)) \;=\; \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|}\,\delta(x-x_n)$$

x_n sind die Nullstellen von f

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty dk\ \mathrm{e}^{ikx-\varepsilon k} = \frac{1}{x+i\varepsilon} = \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$$

$$\int dx\ f(x)\,\delta'(x) = -f'(0) \quad , \quad -x\,\delta'(x) = \delta(x) \quad , \quad \int dx\ \delta(x-a)\,\delta(x-b) \;=\; \delta(a-b)$$

$$\theta(x) = 1-\theta(-x) \quad , \quad \mathrm{sign}\,(x) = \frac{x}{|x|} = 2\,\theta(x)-1 \quad , \quad \partial_x \Big(\theta(x)\text{–Darst.}\Big) \;=\; \delta(x)\text{–Darst.}$$

Punktladung q bei $\vec{r}_0(t)$:

$$\varrho(\vec{r},t) = q\ \delta\Big(\vec{r}-\vec{r}_0(t)\Big)$$
$$\vec{\jmath}\,(\vec{r},t) = \dot{\vec{r}}_0(t)\ q\ \delta\Big(\vec{r}-\vec{r}_0(t)\Big)$$

Geladener Kreisring : $\varrho(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi R}\,\delta(\varrho-R)\,\delta(z)$

Geladene Metallkugel : $\varrho(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi R^2}\,\delta(r-R)$

Der Ortsoperator X (Wirkungsweise $x\cdot$) hat gemäß $x\,\delta(x-a) = a\,\delta(x-a)$ die kontinuierlich mit a numerierten Eigenfunktionen $\delta(x-a)$.

$L\,y(x) = f(x)$ und L ein (auf x–Abh. wirkender) linearer Operator. Gesucht $y(x)$. Wenn man dieses Problem für „Punktquelle“, d.h. das Hilfsproblem

$$L\ G(x,a) = \delta(x-a) \qquad (*)$$

lösen kann und somit eine „Greensche Funktion“ $G(x,a)$ kennt, dann erhält man ein $y(x)$ durch Anwenden des Operators $\int da\ f(a)$ auf beide Seiten von $(*)$:

$$\int da\ f(a)\,L\,G(x,a) \;=\; \int da\ f(a)\,\delta(x-a)$$
$$L\int da\ f(a)\,G(x,a) \;=\; f(x) \qquad \curvearrowright \qquad y(x) = \int da\ f(a)\,G(x,a) \quad .$$