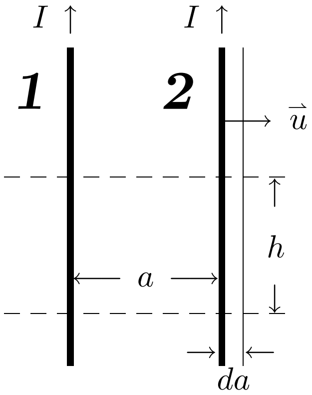

$P = 2\,P - P$

Parallel stromdurchflossene Drähte ziehen sich an (Lorentz–Kraft). Drückt man sie (um da) auseinander, wird Arbeit (dE_1) am System verrichtet. Diese muß nachträglich irgendwo aufgesammelt werden können. Also starrt man auf die Feldenergie

$$E_2 = \int d^3r\, \frac{\epsilon_0 c^2}{2}\, \vec B^{\,2} \;=\; \frac{1}{2}\int d^3r \int d^3r'\, \frac{\vec\jmath\,(\vec r\,)\cdot\vec\jmath\,(\vec r\,')}{4\pi\epsilon_0 c^2\, |\vec r - \vec r\,'|}$$

und auf deren effektiv anwachsenden Nenner $|\vec r - \vec r\,'|$. Sie nimmt **ab** ($dE_2 < 0$), und das tut weh. Etwas, was physikalisch „weh tut" , nennt man gern ein **Paradoxon**.

Was war falsch ? Eigentlich nichts. Es war soweit richtig gedacht – nur arg *unvollständig*. Mit obiger Feldenergie-Abnahme haben wir nur eine von drei Energie–Portionen erwischt, nämlich jene, die in der Überschrift ganz rechts steht.

Nachdenken. Während man Draht **2** mit Geschwindigkeit u in der Zeit $dt = da/u$ um da verschiebt, wirkt eine (zusätzliche) Lorentz–Kraft $q\vec u \times \vec B$ auf jede Ladung q in **2** (dE_3). Es passiert noch mehr. Z.B. im Raumbereich links von Draht **1** ändert sich das (von **2** verursachte) Magnetfeld. Somit ist $\mathrm{rot}\,\vec E \neq 0$. Und dieses elektrische Feld beschleunigt mit Kraft $q\vec E$ die Ladungen in **1** (dE_4). Es fehlten also zwei Portionen mechanischer kinetischer Energie, die man sich am besten (um I konstant zu halten) unverzüglich in Wärme umgewandelt denkt.

Damit dies jemand glaubt, bleibt zu zeigen, daß die Bilanz auch quantitativ stimmt. Dazu nehmen wir die vier Energien pro Höhe und pro da und berechnen die vier „Portionen" P_1 bis P_4.

$$dE_i \;=\; P_i\; h\,da$$

P_1 : In **2** erfährt q die Kraft qvB_1 mit $B_1 = 2\lambda I/a$ ($\lambda := 1/(4\pi\epsilon_0 c^2)$). $q \to d^3r\rho$, $\rho v = j$. $\perp$ auf Segment h wirkt die Kraft $\int_{(h)} d^3r j_2 B_1 =: F$; $dE_1 = F da = da\,h\,I\,B_1$, $2\lambda I^2/a =: P$. Dies war die l.h.s. von $P = 2P - P$, d.h. die am System pro $h\,da$ verrichtete Arbeit : $\boxed{P_1 = P}$

P_2 : $dE_2 = da\,\partial_a \frac{1}{2}\lambda \int_{(h)} d^3r\, d^3r' |\vec r - \vec r\,'|^{-1} (j_1 + j_2)_{\vec r}\,(j_1 + j_2)_{\vec r\,'}$, worin Produkte gleicher Ströme entfallen (Selbstenergie ändert sich nicht mit a). $dE_2 = da\,\partial_a \lambda \int\!\!\int \ldots j_1 j_2$, $P_2 = \frac{1}{h}\partial_a \lambda I^2 \int_{(h)} dz \int dz' (z^2 + a^2)^{-1/2} = -\lambda I^2 \int dz a (z^2 + a^2)^{-3/2}$ Stammfkt. $z(z^2 + a^2)^{-1/2}/a$. Dies war der letzte Term in $P = 2P - P$, d.h. die Feldenergie/$h\,da$–Abnahme: $\boxed{P_2 = -P}$

P_3 : $\vec u \times \vec B_1 \sim \vec e_3$. Während dt wird q in **2** von Kraft quB_1 nach oben beschleunigt. Seine kinetische Energie erhöht sich um $\frac{1}{2}m\,\left[\,(v + dv)^2 - v^2\,\right] = mvdv = vm\dot v dt = vquB_1 dt = qvB_1 da$. $qv \to \int_{(h)} d^3rj = hI$, $dE_3 = hIB_1 da$, $P_3 = IB_1$. Dies war die erste, nur in **2** auftretende, mechanische Portion: $\boxed{P_3 = P}$

P_4 : Nach harmloser Galilei–Transformation ($u << c$, ≈keine Strahlung) ruht **2** und man sieht **1** nach links rutschen: $P_4 = P_3$, elegant! Aber wie kommt auch ein biederer Labor–Mensch dahinter, daß in **1** ebenfalls die Kraft quB_1 wirkt, d.h. das elektrische Feld $\vec e_3 2u\lambda I/a$?
Nur Mut. Während dt verursacht Draht **2** $\vec B = 2\lambda I(-y, x, 0)/(x^2 + y^2)|_{x \to x - ut}$, ergo $-\dot{\vec B} = u\partial_x \vec B$, wonach wir die infinitesimale x-Abänderung wieder vergessen dürfen. Pfeile–Bilder malen ... Ansatz $\vec E = (0, 0, f(x, y))$ mit $f \to 0$ für x, $y \to \infty$. In der folgenden Gl. f ablesen!

$$\mathrm{rot}\,\vec E = (f'^y, -f'^x\,,\,0\,) \overset{!}{=} -\dot{\vec B} = u2\lambda I\,\Big(\,\partial_x \tfrac{-y}{x^2+y^2}\,,\,\partial_x \tfrac{x}{x^2+y^2}\,,\,0\,\Big) \quad\Rightarrow\quad \vec E = \vec e_3\, \tfrac{-2\lambda I u\, x}{x^2+y^2}\;.$$

Auf **1** ist $x = -a$ und $y = 0$, d.h. $\vec E_{\,\mathrm{auf}\,\mathbf{1}} = \vec e_3 u B_1$, qed. $\boxed{P_4 = P}$

Man muß nur Vertrauen haben – zu grundlegenden Gleichungen und sich selbst.

(hschulz@itp.uni-hannover.de)