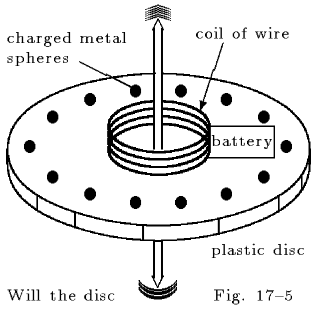
Feynmans Scheibe

[The Feynman Lectures on Physics Addison–Wesley 1989, Vol. II, §17.4]



Will the disc rotate if the current is stopped? Fig. 17–5

Wir denken richtig. Während die Batterie altert, nimmt das „Blumenstrauß" –Magnetfeld $\vec{B} = \nabla \times \lambda \frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$ zeitlich ab: $\vec{B} \cdot f(t)$. Hierbei haben wir uns die Spule als „punktförmig" idealisiert: $\vec{m}$. Zusätzlich zum $\vec{E}$-Feld der festgeklebten Punktladungen gibt es vorübergehend das aus $\operatorname{rot}\vec{E}_\Delta = -\vec{B}\,\dot{f}$ folgende Feld $\vec{E}_\Delta = -\lambda \frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}\dot{f}$. Und dieses dreh–beschleunigt die Scheibe. Sie rotiert. Der entsprechende Drehimpuls war auch schon vorher da, nämlich im Feld. Haben wir nun alles verraten? Eine Frage bleibt offen. **Wie**, in drei Teufels Namen, kann man diese Vermutung **quantitativ** nachprüfen?

Die Übungsaufgabe ist haarig. Wir formulieren sie erst einmal etwas allgemeiner. Ein starrer Körper ruht. Eine vertikale Achse ragt aus ihm heraus und ist gelagert. Ladungen sind irgendwie in ihm festgemacht $\rho(\vec{r})$. Supraleitende Drähte durchziehen ihn und erzeugen ein statisches Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$. Zur Zeit $t = 0$ werde die Sprungtemperatur des Supraleiters überschritten, und der Strom klingt auf Null ab: $\vec{B}(\vec{r})\,f(t)$. Wir vernachlässigen Strahlungsverluste (sie wären andernfalls in die Drehimpuls–Bilanz einzubeziehen). Wenn sich der Körper am Ende dreht, gibt es einen (winzigen) restlichen Felddrehimpuls aufgrund der in ihm festgeklebten Ladungen. Er wird im folgenden (als Bestandteil von $\vec{L}_{\text{nach}}$) einbezogen.

- Vorher, d.h. zu $t < 0$, läßt sich der folgende Feld–Drehimpuls im Raum aufsammeln:

$$\vec{L}_{\text{vor}} = \int d^3r\ \vec{r} \times \left(\epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}\right) \quad , \tag{1}$$

  wobei $\vec{E}$ die Lösung von $\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\epsilon_0$, $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$ ist.

- Nachher, d.h. zu $t > \Delta$, dominiert mechanischer Drehimpuls. Um ihn zu ermitteln, setzen wir $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ (mit $\operatorname{div}\vec{A} = 0$) in die Gleichungen $\operatorname{rot}\vec{E}_\Delta = -\vec{B}\,\dot{f}$, $\operatorname{div}\vec{E}_\Delta = 0$ ein und erhalten $\vec{E}_\Delta = -\vec{A}\,\partial_t f(t)$: Während der Zeit Δ erfährt also der starre Körper das Drehmoment $\partial_t \vec{L} = -\dot{f}(t) \int d^3r\ \vec{r} \times \rho \vec{A}$. Mit $\vec{L}(0) = 0$, $\vec{L}(\Delta) = \vec{L}_{\text{nach}}$, $f(0) = 1$, $f(\Delta) = 0$ folgt

$$\vec{L}_{\text{nach}} = \int d^3r\ \vec{r} \times \rho \vec{A} \quad . \tag{2}$$

- Zeige, daß (1) = (2). Dazu verwenden wir die $\vec{E}$-$\vec{A}$-Eigenschaften $\nabla\vec{E} = \rho/\epsilon_0$, $\nabla \times \vec{E} = 0$, $\nabla\vec{A} = 0$, $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ sowie $\nabla \times \vec{r} = 0$:

$$\begin{aligned}
\vec{L}_{\text{vor}} &= \epsilon_0 \int d^3r\ \vec{r} \times \left(\vec{E} \times \left[\nabla \times \vec{A}\right] + \vec{A} \times \left[\nabla \times \vec{E}\right]\right) \\
&\qquad\qquad (\quad) = \overset{\downarrow}{\nabla}(\vec{E}\ \overset{\downarrow}{\vec{A}}) - (\vec{E}\,\nabla)\vec{A} + \overset{\downarrow}{\nabla}(\overset{\downarrow}{\vec{E}}\ \vec{A}) - (\vec{A}\,\nabla)\vec{E} \\
&\qquad\qquad\qquad \text{und partielle Integration in allen vier Termen:} \\
&= -\epsilon_0 \int d^3r\ \left(\vec{A} \times (\nabla\vec{E})\vec{r} + \vec{E} \times (\nabla\vec{A})\vec{r}\right) \\
&= -\int d^3r\ \left(\vec{A} \times \rho\vec{r} - \epsilon_0 \vec{A} \times \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{A}\right) = \vec{L}_{\text{nach}} \qquad \text{qed.}
\end{aligned} \tag{3}$$

Bis hierher haben wir (entgegen den Vorgaben, bemerkt?) einen frei im Raum schwebenden Körper behandelt (Ursprung irgendwo). Die Achsenlager (nun Ursprung auf Achse $\vec{e}$) kompensieren Drehmoment–Querkomponenten, haben aber keinen Einfluß auf die Projektion $\vec{e} \cdot \vec{L}$. Damit reduziert sich obige Erkenntnis tatsächlich auf $\vec{e} \cdot \vec{L}_{\text{vor}} = \vec{e} \cdot \vec{L}_{\text{nach}}$. Hurra.

(hschulz@itp.uni-hannover.de)