Boltzmann-Gleichung

Wer einmal auf simple Weise, nämlich über $m\dot{v} = qE - \frac{m}{\tau}v$, $\bar{v} = \frac{qE}{m}\tau$ und $j = nq\,\bar{v} =: \sigma E$ bei der Drude-Formel $\sigma = nq^2\tau/m$ angekommen ist, der möchte wohl erfahren, (a) wie eine anständige Herleitung aussieht und (b) wie es sein kann, daß sich die Relaxationszeit τ berechnen läßt. In klassisch-physikalischer "Wirklichkeit" sind bereits ohne Feld $\vec{E}$ die Geschwindigkeiten der Teilchen thermisch verteilt: $d^3v\, f_o(\vec{v}) :=$ **Wahrscheinlichkeit,** *ein* **Teilchen mit Geschwindigkeit in** d^3v **um** $\vec{v}$ **anzutreffen**

In einem dieser d^3v's liegt $\vec{v}$ mit Sicherheit: $\int d^3v\, f_o(\vec{v}) = 1$. Für Pauli-Prinzip-Ignoranten handelt es sich übrigens um die Maxwell-Verteilung $f_o(\vec{v}) = \text{const}\, e^{-\beta m v^2/2}$, für Quantiker und Metall-Kenner um die Fermi-Verteilung.

In Feldern $\vec{E}$, $\vec{B}$ (noch keine Stöße) ändert ein Teilchen, sagt Newton, seine Geschwindigkeit von $\vec{v}$ auf $\vec{v} + d\vec{v}$ mit $d\vec{v} = \frac{1}{m}q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot dt$ und nimmt dabei seine Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\vec{v},t)$ mit : $f(\vec{v} + d\vec{v},\, t + dt) = f(\vec{v},t)$ oder : $dt\,\partial_t f + d\vec{v} \cdot \nabla_v f = 0$:

$$\dot{f} = \dot{f})_{\text{Drift}} + \dot{f})_{\text{Stoss}} \quad , \qquad \dot{f})_{\text{Drift}} = -\frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v f \quad , \qquad \dot{f})_{\text{Stoss}} = -\frac{f - f_o}{\tau}$$

Dabei haben wir den Stoßterm in Relaxationszeit-Näherung aufgeschrieben , d.h. die f-Abnahme als proportional zur f-Abweichung vom Gleichgewicht angenommen. Dies zu prüfen und τ auszurechnen, wird nun dadurch möglich, daß man (quantenmechanisch) die Übergangsrate ausrechnet (von Zustand mit $\vec{v}$ in Zustände mit anderem $\vec{v}$, wobei sich der Streuquerschnitt ins Spiel bringt).

A) Keine Felder : $\dot{f} = (f - f_o)/\tau$ wird gelöst durch $f(\vec{v},t) = f_o(\vec{v}) + [f(\vec{v},0) - f_o(\vec{v})] \cdot e^{-t/\tau}$. τ setzt also die Zeitskala, auf der eine Abweichung abklingt.

B) $\vec{E}$, stationärer Betrieb : $0 = -\frac{q}{m}\vec{E}\,\nabla_v f - (f - f_o)/\tau$. Um den Strom $\vec{\jmath}$ linear in $\vec{E}$ zu erhalten, muß im 1. Term f durch f_o ersetzt werden. Diese „linearisierte Boltzmann-Gleichung" ist nun trivial lösbar: $f = f_o - \frac{q\tau}{m}\vec{E}\,\nabla_v f_o$. Sind $N := nV$ Teilchen in einem (gedachten) Volumen, dann ist Nfd^3v die mittl. Anzahl Teilchen mit Geschw. in d^3v um $\vec{v}$, und $\vec{v}qnfd^3v$ ist die d^3v zuzuordnende Stromdichte. Also ist $\vec{\jmath} = \int d^3v\,\vec{v}\,qnf = -\frac{nq^2\tau}{m}\int d^3v\,\vec{v}\,(\vec{E}\,\nabla_v f_o) = \frac{nq^2\tau}{m} \cdot \vec{E}$, qed.

C) Wechselstrom : Lasse $\dot{f}$ auf der linken Seite stehen, setze $\vec{E} = Re\{\vec{E}_o\, e^{-i\omega t}\}$, linearisiere, löse und erhalte $\vec{\jmath} = Re\{\sigma\,\vec{E}_o\, e^{-i\omega t}\}$ mit $\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}/(1 - i\omega\tau)$.

Dispersionsrelationen (Kramers + Kronig 1927 bzw. 1926)

erhält man im Falle der Leitfähigkeit wie folgt :

$$j(t) = \int dt' s(t-t')\,E(t') \ , \ s(t) = \theta(t)f(t) =: \int d\omega e^{-i\omega t}\sigma(\omega)/2\pi \quad \Rightarrow \quad \sigma(\omega) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} f(t)$$

ist analytisch in der OHE einschließlich reeller Achse, wenn/weil $f(t)$ hinreichend stark bei großen t abfällt (z.B. exponentiell). Wegen

$$\sigma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\text{OHE}} d\omega'\sigma(\omega')/(\omega' - z) \qquad \text{fuer } z \text{ in OHE}$$

folgt (nun ω' und ω wieder reell), daß

$$\sigma(\omega + i\epsilon) = \frac{1}{2\pi i}⨍ d\omega'\sigma(\omega')/(\omega' - \omega) + \sigma(\omega)/2 \ , \ \text{d.h.} \ \sigma(\omega) = \frac{1}{\pi i}⨍ d\omega'\sigma(\omega')/(\omega' - \omega) \ .$$

$$\sigma = A + iB \ : \ A + iB = \frac{1}{\pi i}⨍ d\omega'(A + iB)/(\omega' - \omega) \ \Rightarrow \ A(\omega) = \frac{1}{\pi}⨍ d\omega' B(\omega')/(\omega' - \omega)$$

Oberste Formelzeile, rechts $\Rightarrow$ $\sigma(-z) = [\,\sigma(z^*)\,]^*$. Also ist $A(-\omega) + iB(-\omega) = A(\omega) - iB(\omega)$ und somit der σ-Realteil A eine gerade Funktion von ω , – und B eine ungerade.

(hschulz@itp.uni-hannover.de)