Juli 1998

Das Felder–Anfangswertproblem

Elektrodynamik. Vakuum. Zur Zeit $t=0$ seien die Felder $\vec{E}(\vec{r},0)$ und $\vec{B}(\vec{r},0)$ bekannt. Die Maxwell–Gleichungen sind Dgln erster Ordnung, insbesondere in der Zeitableitung — wie in der Quantenmechnik. Also liegt die Zukunft der beiden Felder fest. Wie sieht sie aus?

Diese Frage scheint sich bei realen Problemen nicht zu stellen. Wohl darum kommt sie in Lehrbüchern zur Elektrodynamik nicht vor (oder etwa doch irgendwo?). Dafür, das Anfangswertproblem zu lösen, gibt aber drei gute Gründe:

1. Die Frage ist *philosophisch* interessant. Könnte man die Platten eines Kondensators wegreißen, hinge also ein $\vec{E}$–Feld im Raum, was passiert dann? Vielleicht ist die Absurdität hinter „könnte" zu groß. Aber man kann den Strom einer Spule anhalten. Das bekannte „Blumenstrauß"–Magnetfeld hängt dann im Raum. Wie fliegt es davon?
2. Die Einheit der Physik ist — wo immer möglich — auch in den Strukturen anzustreben. Inwiefern Elektrodynamik Quantenmechanik ist, wird alsbald deutlich werden.
3. Der Weg ist das Ziel. Ein paar Details der Herleitung sind so schön, daß man nicht an ihnen vorüber gehen kann.

Kombiniert man die Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$ zu einem einzigen komplexwertigen Feld $\vec{\psi}$, dann gehen die vier Mawell–Gleichungen in die folgenden zwei über

$$\vec{E}+ic\vec{B}=:\vec{\psi} \qquad \Rightarrow \quad i\dot{\vec{\psi}}=c\nabla\times\vec{\psi}-\frac{i}{\varepsilon_0}\vec{\jmath} \quad , \quad \nabla\cdot\vec{\psi}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{1}$$

Im Vakuum ($\vec{\jmath}=0$, $\rho=0$) gilt ersichtlich die Schrödinger–Gleichung mit $\hbar=1$ und Hamilton–Operator $H=c\nabla\times$. Deren formale Lösung ist bekanntlich

$$\dot{\vec{\psi}}(\vec{r},t)=e^{-ict\nabla\times}\vec{\psi}(\vec{r},0) \quad , \quad \psi(\vec{r},0)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\ e^{i\vec{k}\vec{r}}\ \vec{\tilde{\psi}}\ (\vec{k},0) \quad , \tag{2}$$

und worauf $\vec{\psi}(\vec{r},0)$ wartet, nämlich auf Entwicklung nach Nabla–Eigenfunktionen, das ist rechts bereits angefügt. Die zweite neue Maxwell–Gleichung, $\nabla\vec{\psi}=0$, ist lediglich Welt–Anfangsbedingung: galt sie nämlich einmal weltweit, dann tut sie es aufgrund von (2) links noch heute (wende ∇ auf beide Seiten an). Der Operator $\exp(-ict\nabla\times)$ darf an der Summe $\int d^3k$ vorbei, bleibt bei $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ erstaunt stehen und holt sich die e–Funktion am Kreuz vorbei an Nabla heran — in welcher Potenz $\nabla\times$ auch immer vorkommt. Kurz und wie erwartet, die Ersetzung $\nabla\to i\vec{k}$ ist erlaubt. Wir sind jetzt angekommen bei

$$\vec{\psi}(\vec{r},t)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\ e^{i\vec{k}\vec{r}}e^{ct\vec{k}\times}\ \vec{\tilde{\psi}}\ (\vec{k},0) \quad . \tag{3}$$

Es folgt eine lanschaftlich schöne Strecke. Stets, wenn ein Term mit Operator $ct\vec{k}\cdot$ am rechten Ende auf $\vec{\tilde{\psi}}$ trifft, kann er wegen Welt–Anfangsbedingung $i\vec{k}\cdot\vec{\tilde{\psi}}=0$ entfallen:

$$ct\vec{k}\times\ =:A \quad , \quad e^A=\mathrm{ch}(A)+\mathrm{sh}(A)$$

$$A^2=ct\vec{k}\times\left(ct\vec{k}\times\ \right)=ct\vec{k}\left(ct\vec{k}\cdot\ \right)-(ctk)^2=-(ctk)^2$$

$$A^3=-(ctk)^3\frac{A}{ctk} \ , \ A^4=(ctk)^4 \quad , \quad A^5=(ctk)^5\frac{A}{ctk} \ , \ A^6=-(ctk)^6 \ , \ \ldots$$

$$e^{ct\vec{k}\times}=\cos(ctk)+\sin(ctk)\,\frac{\vec{k}}{k}\times \quad . \tag{4}$$

Mit (4) ist die Operator–Explizierung erreicht, welche sich (3) gewünscht hatte.

Die Lösung (3) des Problems, aber auch ihren *input* $\vec{\tilde{\psi}}\,(\vec{k},0)$, möchten wir nun auf die reellen Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$ zurückschreiben. Die Fourier–Transformierten der Startfelder

$$\vec{E}(\vec{r},0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \;\, e^{i\vec{k}\vec{r}} \;\vec{\tilde{e}} \quad , \quad \vec{B}(\vec{r},0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \;\, e^{i\vec{k}\vec{r}} \;\vec{\tilde{b}} \quad , \tag{5}$$

haben wir soeben kurzerhand mit $\vec{\tilde{e}}$ und $\vec{\tilde{b}}$ bezeichnet (um das lästige 0–Argument einzusparen). Es ist also $\vec{\tilde{\psi}}\,(\vec{k},0) = \vec{\tilde{e}} + ic\,\vec{\tilde{b}}$. Da die Startfelder reell sind, gilt $\vec{\tilde{e}}\,(-\vec{k})^* = \vec{\tilde{e}}$ und $\vec{\tilde{b}}\,(-\vec{k})^* = \vec{\tilde{b}}$. Dies hilft sogleich, wenn wir uns $\vec{\psi}$ und $\vec{\psi}^*$ untereinander schreiben. Zu $C := \cos(ctk)$ und $S := \sin(ctk)$ merken wir uns, daß sie nur von $k = |\vec{k}\,|$ abhängen:

$$\begin{aligned}
\vec{\psi}(\vec{r},t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \;\, e^{i\vec{k}\vec{r}} \left[C + S\,\frac{\vec{k}}{k}\times \right] \left(\vec{\tilde{e}} + ic\,\vec{\tilde{b}} \right) \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \;\, e^{i\vec{k}\vec{r}} \left[C\,\vec{\tilde{e}} + S\,\frac{\vec{k}}{k}\times ic\,\vec{\tilde{b}} + Cic\,\vec{\tilde{b}} + S\,\frac{\vec{k}}{k}\times \vec{\tilde{e}} \right] \\
\vec{\psi}(\vec{r},t)^* &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \;\, e^{-i\vec{k}\vec{r}} \left[C + S\,\frac{\vec{k}}{k}\times \right] \left(\vec{\tilde{e}}^{\,*} - ic\,\vec{\tilde{b}}^{\,*} \right) \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \;\, e^{i\vec{k}\vec{r}} \left[C\,\vec{\tilde{e}} + S\,\frac{\vec{k}}{k}\times ic\,\vec{\tilde{b}} - Cic\,\vec{\tilde{b}} - S\,\frac{\vec{k}}{k}\times \vec{\tilde{e}} \right] \quad .
\end{aligned} \tag{6}$$

Im Schritt zur letzten Zeile wurde unter Integral die Richtung des Vektors $\vec{k}$ umgekehrt. Mit (6) haben wir

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{\vec{\psi} + \vec{\psi}^*}{2} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \;\, e^{i\vec{k}\vec{r}} \left[C\,\vec{\tilde{e}} + S\frac{\vec{k}}{k}\times ic\,\vec{\tilde{b}} \right] \\
\vec{B}(\vec{r},t) &= \frac{\vec{\psi} - \vec{\psi}^*}{2ic} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \;\, e^{i\vec{k}\vec{r}} \left[C\,\vec{\tilde{b}} + S\frac{\vec{k}}{ick}\times \vec{\tilde{e}} \right] \quad .
\end{aligned} \tag{7}$$

Sicherlich verbirgt sich noch mehr Harmonie hinter den Ausdrücken (7). Man denke etwa an die möglichen Umformungen

$$S = \frac{-1}{ck}\,\partial_t C \quad , \quad C = \frac{1}{ck}\,\partial_t S \quad , \quad \vec{\tilde{b}} = \frac{\vec{k}}{k}\times\left(\vec{\tilde{b}}\times\frac{\vec{k}}{k}\right) \quad , \quad i\vec{k} \to \nabla \quad . \tag{8}$$

Kurz, (7) läßt sich durch ein Vektorpotential $\vec{A}$ darstellen (Weyl–Eichung):

$$\vec{E} = -\dot{\vec{A}}\;,\; \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \quad , \quad \vec{A} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \;\, e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{1}{ck} \left[-S\,\vec{\tilde{e}} + C\frac{ic\vec{k}}{k}\times\vec{\tilde{b}} \right] \quad . \tag{9}$$

Nun ist nur noch der Ausdruck für $\vec{A}$ unharmonisch. Bei Nachprüfen der folgenden schöneren Version sind wieder die Relationen $\vec{\tilde{e}}\,(-\vec{k})^* = \vec{\tilde{e}}$ und $\vec{\tilde{b}}\,(-\vec{k})^* = \vec{\tilde{b}}$ sowie $\vec{k}$–Umkehr im Spiel. $\vec{A}$ als Entwicklung nach laufenden Wellen zu schreiben, war das Ziel:

$$\boxed{\begin{matrix} \vec{E} = -\dot{\vec{A}} \\ \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \end{matrix} \quad , \quad \vec{A} \;=\; \Re e \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \;\, \frac{k\,\vec{\tilde{e}} - c\vec{k}\times\vec{\tilde{b}}}{ick^2} \;\; e^{i\vec{k}\vec{r} - ictk}} \quad . \tag{10}$$

Erstes Beispiel

Zu einer ebenen elektromagnetischen Welle ist zur Zeit $t=0$ nur die Momentaufnahme bekannt: $\vec{E}(\vec{r},0) = E_0 \vec{e}_3 \cos(qx)$, $\vec{B}(\vec{r},0) = -\frac{1}{c} E_0 \vec{e}_2 \cos(qx)$. OBdA $0<q$. Also ist

$$\left\{ \vec{\tilde{e}}\,,\ \vec{\tilde{b}} \right\} \ = \ E_0 \left\{ \vec{e}_3\,,\ -\frac{1}{c}\,\vec{e}_2 \right\}\ (2\pi)^3 \delta(k_2)\delta(k_3) \frac{1}{2}\Big[\delta(k_1-q)+\delta(k_1+q)\Big] \quad .$$

Hiermit führt (10) in etwas Rechnerei und schließlich zu

$$\vec{A}(\vec{r},t) \ = \ E_0\,\vec{e}_3\,\frac{1}{cq}\ \sin\Big(q\,x - cq\,t\Big) \quad . \tag{11}$$

Der $\vec{E}$–$\vec{B}$–Raumkreuzer fliegt also tatsächlich mit c nach rechts. Dieses Beispiel war natürlich nur ein Test darauf, daß (10) auch wirklich stimmt.

Zweites Beispiel

Zur Zeit $t=0$ wird der Ringstrom eines magnetischen Dipols abgeschaltet. Das Blumenstrauß–Magnetfeld hängt nun im Raum und weiß nicht weiter. $\lambda := 1/(4\pi\varepsilon_0 c^2)$ und $\vec{m}$ ist konstanter Vektor:

$$\vec{B}(\vec{r},0) = \lambda\,\frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5} = \lambda\nabla\times\Big(\nabla\times\vec{m}\Big)\,\frac{1}{r} \quad , \quad \vec{\tilde{b}} = \lambda\,\vec{k}\times\Big(\vec{m}\times\vec{k}\Big)\,\frac{4\pi}{k^2} \quad , \tag{12}$$

denn $4\pi/k^2$ ist die Fourier–Transformierte von $1/r$. $\vec{E}(\vec{r},0)$ und $\vec{\tilde{e}}$ sind Null. Aus (10) wird

$$\begin{aligned}
\vec{A} \ &= \ 4\pi\lambda\ \underbrace{\nabla\times\Big[\nabla\times\Big(\nabla\times\vec{m}\Big)\Big]}_{\vec{m}\times\nabla\Delta}\ \Re e\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k\ \frac{1}{k^4}\ e^{i\vec{k}\vec{r}-ictk} \\
&= \ 4\pi\lambda\,\vec{m}\times\nabla\ \frac{1}{r}\,\partial_r^2\,r\ \Re e\,\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dk\ \frac{\sin(kr)}{k^3 r}\ e^{-ictk} \\
&= \ \frac{-2\lambda}{\pi}\,\vec{m}\times\nabla\,\frac{1}{r}\int_0^r dr'\ \frac{1}{2}\int dk\ \cos(kr')\ \cos(ctk) \\
&= \ -\lambda\,\vec{m}\times\nabla\ \frac{\theta(r-ct)}{r} \ = \ \lambda\,\vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r}\left(\frac{\theta(r-ct)}{r^2} - \frac{\delta(r-ct)}{r}\right) \quad ,
\end{aligned} \tag{13}$$

und das Resultat für die Felder ist

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r},t) \ &= \ -\lambda c\,\vec{m}\times\vec{e}_r\left[\frac{\delta'(r-ct)}{r} - \frac{\delta(r-ct)}{r^2}\right] \quad , \\
\vec{B}(\vec{r},t) \ &= \ -\lambda\vec{e}_r\times\Big(\vec{m}\times\vec{e}_r\Big)\ \left[\frac{\delta'(r-ct)}{r} - \frac{\delta(r-ct)}{r^2}\right] - 2\lambda\vec{e}_r\Big(\vec{m}\vec{e}_r\Big)\,\frac{\delta(r-ct)}{r^2} \\
&\quad + \lambda\ \theta(r-ct)\ \frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5} \quad .
\end{aligned} \tag{14}$$

Hübsch. Das rast eine Kugeloberfläche (Radius ct) mit Lichtgeschwindigkeit nach außen. Innerhalb der Kugel ist nichts mehr, weder $\vec{E}$ noch $\vec{B}$. Als wäre nichts gewesen hängt außerhalb der Kugel noch das Blumenstrauß–Magnetfeld faul herum — bis es von der Kugelwelle erreicht und aufgefressen wird: Freßwelle. Nach langer Zeit sind weit draußen ($r\to\infty$) nur noch die dominanten δ'–Terme zu sehen. Ursache der Kugelwelle ist natürlich die kurzzeitige, quasi–unendliche Beschleunigung der Ringstrom–Ladungen am Ursprung. Das Resultat (14) hätte man wohl auch erraten oder durch Überlagerung von magnetischen Hertz–Dipolen erhalten können. Aber wir haben da ja noch das allgemeine Resultat (10). Beispiel 3 erfinde der Leser selbst.

(hschulz@itp.uni-hannover.de)