$\boldsymbol{u}\ ,\ \boldsymbol{v}$ *und ein Plädoyer für Heidebauern*

Wenn man ein System Σ', in welchem der Zustand $\begin{pmatrix}\chi_s\\0\\0\end{pmatrix}e^{-imt'}$ bzw. $\begin{pmatrix}0\\0\\\chi_s\end{pmatrix}e^{imt'}$ vorliegt, mit $v\vec{e}$ in die Gegend wirft, dann erzählt $\psi(x)=S^{-1}\psi'(x'=\Lambda x)$, wie der Zustand im Labor Σ gesehen wird. Um dies zu explizieren, wird (S für boost siehe (D.8), hier in Dirac–Basis ; $E_q := \sqrt{m^2+q^2}$)

$$S^{-1} = \left[\mathrm{ch}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \mathrm{sh}\left(\frac{\omega}{2}\right)\begin{pmatrix}0 & \vec{e}\,\vec{\sigma}\\ \vec{e}\,\vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}\right] \quad , \quad \Lambda = \begin{pmatrix}\gamma & -\beta\gamma\vec{e}\\ -\beta\gamma\vec{e} & 1+(\gamma-1)\,\vec{e}\circ\vec{e}\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{matrix} m\beta\gamma\vec{e} = \vec{q} \\ m\gamma = E_q \end{matrix} \tag{uv.1}$$

benötigt, und man erhält

$$\psi(x) = u_{s,\vec{q}}\; e^{-iE_qt+i\vec{q}\,\vec{r}} \qquad \text{bzw.} \qquad \psi(x) = v_{-s,\vec{q}}\; e^{iE_qt-i\vec{q}\,\vec{r}} \qquad \text{mit} \tag{uv.2}$$

$$u_{s,\vec{q}} = \sqrt{\frac{E_q+m}{2m}}\begin{pmatrix}\chi_s\\ \varkappa\,\chi_s\end{pmatrix} \quad , \quad v_{-s,\vec{q}} = \sqrt{\frac{E_q+m}{2m}}\begin{pmatrix}\varkappa\,\chi_s\\ \chi_s\end{pmatrix} \quad , \quad \varkappa := \frac{\vec{q}\,\vec{\sigma}}{E_q+m} \quad . \tag{uv.3}$$

Das sind sie, die u, v, d.h. die Koeffizienten–Spinoren der stationären, ebenwelligen Lösungen der freien Dirac–Gleichung. Zu χ_s haben wir uns $\binom{1}{0}$ bzw. $\binom{0}{1}$ vorgestellt, so daß $\chi_s\chi_{s'} = \delta_{s,s'}$. Unverzüglich kann man nun einige Relationen nachprüfen :

$$u_s^* u_{s'} = \frac{E_q}{m}\,\delta_{s,s'} \quad , \quad v_s^* v_{s'} = \frac{E_q}{m}\,\delta_{s,s'} \quad , \quad u^*_{s,\vec{q}}\, v_{-s',-\vec{q}} = 0 \quad , \quad \text{sowie mit Def. } \overline{\psi} := \psi^*\gamma^0 \quad : \tag{uv.4}$$

$$\overline{u}_s u_{s'} = \delta_{s,s'} \quad , \quad \overline{v}_s v_{s'} = -\delta_{s,s'} \quad , \quad \overline{u}_s v_{s'} = 0 \quad ; \quad \sum_{s=1}^{2}\left(u_{s\alpha}\overline{u}_{s\beta} - v_{s\alpha}\overline{v}_{s\beta}\right) = \delta_{\alpha\beta} \quad . \tag{uv.5}$$

An der vierten Stelle steht die zugehörige Vollständigkeitsrelation ("Summe über Quantenzahlen gibt Kronecker in Variablen") . Sofern an beiden Partnern gleich, wurde der langweilige $\vec{q}$-Index weggelassen. Mit Vierervektor $Q = \left(E_q, \vec{q}\right)$ gilt

$$(\not{Q}-m)\,u_{s,\vec{q}} = 0 \quad , \quad (\not{Q}+m)\,v_{s,\vec{q}} = 0 \quad ; \quad \overline{u}_{s,\vec{q}}\;(\not{Q}-m) = 0 \quad , \quad \overline{v}_{s,\vec{q}}\;(\not{Q}+m) = 0 \quad . \tag{uv.6}$$

Wer da aber ein uriger Heidebauer ist, tief verwurzelt in irdischer Quantenmechanik, der greift sich $i\dot{\psi} = H_D\psi$, $H_D = m\gamma^0 - i\gamma^0\vec{\gamma}\nabla$, und löst dies mit $\psi_{s,\vec{q},b} = \xi_{s,\vec{q},b}e^{-iE_{q,b}t}e^{i\vec{q}\,\vec{r}}$, b = Bandindex = c,v (conduction, valence), $E_{q,b} = \pm E_q$. Wegen $H_D^\dagger = H_D$ weiß er vorweg von Kronecker–Normierbarkeit und erhält

$$\xi^*_{s,\vec{q},b}\,\xi_{s',\vec{q},b'} = \delta_{s,s'}\,\delta_{b,b'} \qquad , \qquad \xi_{s,\vec{q},c} = \sqrt{\frac{m}{E_q}}\,u_{s,\vec{q}} \quad , \quad \xi_{s,\vec{q},v} = \sqrt{\frac{m}{E_q}}\,v_{-s,-\vec{q}} \quad . \tag{uv.7}$$

"Aaah", sagt er nun, "diese Relativisten ! Zum einen drehen sie mir zum Valenzband das $\vec{q}$-Vorzeichen um (aber wegen $\varkappa(-\vec{q}) = -\varkappa(\vec{q})$ ist alles OK), zum anderen steigen sie auf eine invariante Normierung (d^3rE_q = Lorentz–Skalar) um. Na gut.". Stur (aber nicht blöde) wie er ist, holt er noch alte Weisheit zur Besetzungszahldarstellung aus der Scheune und notiert (unter Ausschreiben der Summe über Bandindex b) den Feldoperator :

$$\Psi(\vec{r}) \;=\; \sum_s \int d^3q \left(\xi_{s,\vec{q},c}\,\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}e^{i\vec{q}\,\vec{r}}\; b_{s,\vec{q},c} \;+\; \xi_{s,\vec{q},v}\,\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}e^{i\vec{q}\,\vec{r}}\; b_{s,\vec{q},v}\right) \quad . \tag{uv.8}$$

Nun spielt er mit der Definition $d^\dagger_{s,\vec{q}} := b_{-s,-\vec{q},v}$ und bemerkt, daß auch d und $d^\dagger$ (Positron–Erzeuger) die Fermi–Algebra erfüllen. Für $b_{s,\vec{q},c}$ schreibt er schlicht $b_{s,\vec{q}}$ (Elektron–Vernichter), und im zweiten Term wechselt er unter $\sum_s\int d^3q$ die Vorzeichen von s und $\vec{q}$. Schließlich definiert er sich per $d_{s,\vec{q}}\,|0>= 0$ ein neues Vakuum $|0>$, erhält

$$\Psi(x) \;=\; \sum_s \int d^3q\,\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3E_q}}\,\left(u_{s,\vec{q}}\; e^{-iQx}\; b_{s,\vec{q}} \;+\; v_{s,\vec{q}}\; e^{iQx}\; d^\dagger_{s,\vec{q}}\right) \tag{uv.9}$$

und ist damit perfekt bei der Quantisierung der Feld–Leute angekommen. Die in (uv.9) hinzugefügte Zeitabhängigkeit ist jene von Heisenberg–Operatoren, $Q := (E_q, \vec{q})$. Damit ist er nun sehr zufrieden und murmelt noch "habe Einheit der Physik hergestellt" in den Bart.

(hschulz@itp.uni-hannover.de)