$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *und ein Plädoyer für Heidebauern*

Wenn man ein System Σ', in welchem der Zustand $\begin{pmatrix}\chi_s\\0\\0\end{pmatrix}e^{-imt'}$ bzw. $\begin{pmatrix}0\\0\\\chi_s\end{pmatrix}e^{imt'}$ vorliegt, mit $v\vec{e}$ in die Gegend wirft, dann erzählt $\psi(x)=S^{-1}\psi'(x'=\Lambda x)$, wie der Zustand im Labor Σ gesehen wird. Um dies zu explizieren, wird (S für boost siehe (D.8), hier in Dirac–Basis; $E_q:=\sqrt{m^2+q^2}$)

$$S^{-1}=\left[\mathrm{ch}\left(\frac{\omega}{2}\right)+\mathrm{sh}\left(\frac{\omega}{2}\right)\begin{pmatrix}0&\vec{e}\,\vec{\sigma}\\ \vec{e}\,\vec{\sigma}&0\end{pmatrix}\right]\quad,\quad \Lambda=\begin{pmatrix}\gamma&-\beta\gamma\vec{e}\\ -\beta\gamma\vec{e}&1+(\gamma-1)\,\vec{e}\circ\vec{e}\end{pmatrix}\quad,\quad \begin{matrix}m\beta\gamma\vec{e}=\vec{q}\\ m\gamma=E_q\end{matrix} \qquad (\mathrm{uv}\,.\,1)$$

benötigt, und man erhält

$$\psi(x)=u_{s,\vec{q}}\;e^{-iE_qt+i\vec{q}\,\vec{r}}\qquad\text{bzw.}\qquad \psi(x)=v_{-s,\vec{q}}\;e^{iE_qt-i\vec{q}\,\vec{r}}\qquad\text{mit}\qquad (\mathrm{uv}\,.\,2)$$

$$u_{s,\vec{q}}=\sqrt{\frac{E_q+m}{2m}}\begin{pmatrix}\chi_s\\ \varkappa\,\chi_s\end{pmatrix}\quad,\quad v_{-s,\vec{q}}=\sqrt{\frac{E_q+m}{2m}}\begin{pmatrix}\varkappa\,\chi_s\\ \chi_s\end{pmatrix}\quad,\quad \varkappa:=\frac{\vec{q}\,\vec{\sigma}}{E_q+m}\quad. \qquad (\mathrm{uv}\,.\,3)$$

Das sind sie, die u, v, d.h. die Koeffizienten–Spinoren der stationären, ebenwelligen Lösungen der freien Dirac–Gleichung. Zu χ_s haben wir uns $\binom{1}{0}$ bzw. $\binom{0}{1}$ vorgestellt, so daß $\chi_s\chi_{s'}=\delta_{s,s'}$. Unverzüglich kann man nun einige Relationen nachprüfen:

$$u_s^*u_{s'}=\frac{E_q}{m}\,\delta_{s,s'}\quad,\quad v_s^*v_{s'}=\frac{E_q}{m}\,\delta_{s,s'}\quad,\quad u^*_{s,\vec{q}}\;v_{-s',-\vec{q}}=0\quad,\quad\text{sowie mit Def. }\overline{\psi}:=\psi^*\gamma^0\quad: \qquad (\mathrm{uv}\,.\,4)$$

$$\overline{u}_su_{s'}=\delta_{s,s'}\quad,\quad \overline{v}_sv_{s'}=-\delta_{s,s'}\quad,\quad \overline{u}_sv_{s'}=0\quad;\quad \sum_{s=1}^{2}\left(u_{s\alpha}\overline{u}_{s\beta}-v_{s\alpha}\overline{v}_{s\beta}\right)=\delta_{\alpha\beta}\quad. \qquad (\mathrm{uv}\,.\,5)$$

An der vierten Stelle steht die zugehörige Vollständigkeitsrelation ("Summe über Quantenzahlen gibt Kronecker in Variablen"). Sofern an beiden Partnern gleich, wurde der langweilige $\vec{q}$-Index weggelassen. Mit Vierervektor $Q=\left(E_q,\vec{q}\right)$ gilt

$$(\not{Q}-m)\,u_{s,\vec{q}}=0\quad,\quad(\not{Q}+m)\,v_{s,\vec{q}}=0\quad;\quad \overline{u}_{s,\vec{q}}\;(\not{Q}-m)=0\quad,\quad \overline{v}_{s,\vec{q}}\;(\not{Q}+m)=0\quad. \qquad (\mathrm{uv}\,.\,6)$$

Wer da aber ein uriger Heidebauer ist, tief verwurzelt in irdischer Quantenmechanik, der greift sich $i\dot{\psi}=H_D\psi$, $H_D=m\gamma^0-i\gamma^0\vec{\gamma}\nabla$, und löst dies mit $\psi_{s,\vec{q},b}=\xi_{s,\vec{q},b}e^{-iE_{q,b}t}e^{i\vec{q}\,\vec{r}}$, $b=$ Bandindex $=c,v$ (conduction, valence), $E_{q,b}=\pm E_q$. Wegen $H_D^\dagger=H_D$ weiß er vorweg von Kronecker–Normierbarkeit und erhält

$$\xi^*_{s,\vec{q},b}\,\xi_{s',\vec{q},b'}=\delta_{s,s'}\,\delta_{b,b'}\qquad,\qquad \xi_{s,\vec{q},c}=\sqrt{\frac{m}{E_q}}\,u_{s,\vec{q}}\quad,\quad \xi_{s,\vec{q},v}=\sqrt{\frac{m}{E_q}}\,v_{-s,-\vec{q}}\quad. \qquad (\mathrm{uv}\,.\,7)$$

"Aaah", sagt er nun, "diese Relativisten! Zum einen drehen sie mir zum Valenzband das $\vec{q}$-Vorzeichen um (aber wegen $\varkappa(-\vec{q})=-\varkappa(\vec{q})$ ist alles OK), zum anderen steigen sie auf eine invariante Normierung ($d^3rE_q=$ Lorentz–Skalar) um. Na gut.". Stur (aber nicht blöde) wie er ist, holt er noch alte Weisheit zur Besetzungszahldarstellung aus der Scheune und notiert (unter Ausschreiben der Summe über Bandindex b) den Feldoperator:

$$\Psi(\vec{r})\;=\;\sum_s\int d^3q\left(\xi_{s,\vec{q},c}\,\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}e^{i\vec{q}\,\vec{r}}\;b_{s,\vec{q},c}\;+\;\xi_{s,\vec{q},v}\,\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}e^{i\vec{q}\,\vec{r}}\;b_{s,\vec{q},v}\right)\quad. \qquad (\mathrm{uv}\,.\,8)$$

Nun spielt er mit der Definition $d^\dagger_{s,\vec{q}}:=b_{-s,-\vec{q},v}$ und bemerkt, daß auch d und $d^\dagger$ (Positron–Erzeuger) die Fermi–Algebra erfüllen. Für $b_{s,\vec{q},c}$ schreibt er schlicht $b_{s,\vec{q}}$ (Elektron–Vernichter), und im zweiten Term wechselt er unter $\sum_s\int d^3q$ die Vorzeichen von s und $\vec{q}$. Schließlich definiert er sich per $d_{s,\vec{q}}\,|0>=0$ ein neues Vakuum $|0>$, erhält

$$\Psi(x)\;=\;\sum_s\int d^3q\,\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3E_q}}\,\left(u_{s,\vec{q}}\;e^{-iQx}\;b_{s,\vec{q}}\;+\;v_{s,\vec{q}}\;e^{iQx}\;d^\dagger_{s,\vec{q}}\right) \qquad (\mathrm{uv}\,.\,9)$$

und ist damit perfekt bei der Quantisierung der Feld–Leute angekommen. Die in (uv.9) hinzugefügte Zeitabhängigkeit ist jene von Heisenberg–Operatoren, $Q:=(E_q,\vec{q})$. Damit ist er nun sehr zufrieden und murmelt noch "habe Einheit der Physik hergestellt" in den Bart.

(hschulz@itp.uni-hannover.de)