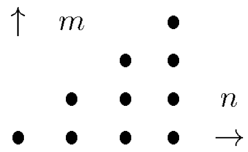
$$U(t,t_1) \;=\; U(t,t_2)\,U(t_2,t_1)$$

Zum obigen "Einziehen einer Zeitmarke" ( $t_1 < t_2 < t$ ) ist die Rückwärts–Herleitung per $\mathcal{T}e^{-i\int_{t_2}^{t}\cdots}\,\mathcal{T}e^{-i\int_{t_1}^{t_2}\cdots} = \mathcal{T}e^{-i\int_{t_2}^{t}\cdots}e^{-i\int_{t_1}^{t_2}\cdots} = \mathcal{T}e^{-i\int_{t_1}^{t}\cdots}$ ganz in Ordnung, aber wohl mental arg anstrengend. Es geht auch im Detail und im Vorwärtsgang. Wir reduzieren (in einem ersten Anlauf) die beiden Integrale je auf einen Term: $A(t)$ und $B(t_1)$, im folgenden kurz $A$, $B$ genannt. Beide enthalten Fermi–Operatoren nur geradzahlig. $A$ hat die größere Zeitmarke.

$$\mathcal{T}e^{A+B} \;=\mathcal{T}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,(A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\mathcal{T}\;\left(A^n + A^{n-1}B + A^{n-2}BA + \ldots + B^n\right) \quad .$$

Nun entzerrt $\mathcal{T}$ die Produkt–Reihenfolgen zu




$$\mathcal{T}e^{A+B} \;=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\;A^m\,B^{n-m} \qquad .$$

Das Punkte–Bild erklärt, wie man die Summen vertauschen kann (Integrale übrigens ebenso): $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}$. Anschließende Verschiebung $n \to n+m$ liefert sodann

$$\mathcal{T}e^{A+B} \;=\; \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\,A^m\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{(n-m)!}\,B^{n-m} \;=\; e^A\,e^B \quad .$$

Sind nun $A$ und $B$ ihrerseits additiv so zusammengesetzt ($A = -i\int_{t_2}^{t}\ldots$ , $B = -i\int_{t_1}^{t_2}\ldots$), daß alle Zeitmarken in $A$ größer als jene in $B$ sind, dann stört dies obige Rechnung nur wenig. Lediglich bleibt vor $A^m$ und $B^{n-m}$ je ein Zeitordnungsoperator $\mathcal{T}$ stehen. Resultat: $\mathcal{T}e^{A+B} \;=\; \mathcal{T}e^{A}\;\mathcal{T}e^{B}$ , qed.

( hschulz@itp.uni-hannover.de )