Wicks Theorem

Im Wechselwirkungsbild bestehen Feldoperatoren A, B, $\ldots$ Y, Z (manche Fermi, manche Bose) aus einem Vernichter– und einem Erzeuger–Anteil : $A = A_v + A_e$. Wicks Theorem [G.C. Wick, Phys. Rev. **80** (1950) 268] gibt darüber Auskunft, wie man Produkte $AB\ldots YZ$ additiv zusammensetzen kann aus normalgeordneten Produkten und c–Zahlen. Dies ist deshalb so erfreulich, weil man häufig Vakuum–Erwartungswerte solcher Produkte auszuwerten hat und $\langle 0|\!:\,\ldots\,:\!|0\rangle = 0$ ist, so daß nur die c–Zahl–Anteile überleben, s. (W . 4) . $|0\rangle$ ist natürlich das durch $A_v|0\rangle = 0$ etc. definierte Vakuum. Beispiel : $\langle 0|\!:\!AB\!:\!|0\rangle = \langle 0|A_vB_v + A_eB_v \mp B_eA_v + A_eB_e|0\rangle = 0$, oberes Vorzeichen für Fermifelder. Wir stellen die drei Versionen des Theorems als Behauptungen voran und kommentieren die Herleitung unter der zweiten Horizontalen.

Einfaches Produkt :

$$AB\ldots YZ \;=\; :\!AB\ldots YZ\!: + \sum :\overbracket{AB}\,C\ldots YZ: + \sum\sum :\overbracket{AB}\;\overbracket{CD}\ldots YZ: + \ldots \qquad \text{(W . 1)}$$

wobei $\overbracket{AB} = \langle 0|AB|0\rangle$ ist (und als c–Zahl natürlich auch vor $:$ gezogen werden kann) sowie $:\!A\,\overbracket{BC\ldots Y}\,Z\!: \;=$ $(\mp)^N\,\overbracket{BY}\;:\!AC\ldots Z\!:$. N ist die Anzahl der Vertauschungen, um Y an B zu bringen. Die einzelne Σ läuft über alle Möglichkeiten, im "Alphabet" *ein* Paar zu bilden, $\Sigma\Sigma$ über alle Zwei–Paar–Möglichkeiten, usw.

Zeitgeordnetes Produkt :

$$\mathcal{T}AB\ldots YZ \;=\; :\!AB\ldots YZ\!: + \sum :\underbracket{A\,B}\,C\ldots YZ: + \sum\sum :\underbracket{A\,B}\;\underbracket{C\,D}\ldots YZ: + \ldots \qquad \text{(W . 2)}$$

Gegenüber (W . 1) hat nun lediglich die Kontraktion eine andere Bedeutung, nämlich $\underbracket{A\,B} = \langle 0|\mathcal{T}AB|0\rangle$

Zeitgeordnetes Produkt aus Normalprodukten :

$$\mathcal{T}\,:\!A_1\ldots A_\ell\!:\;:\!B_1\ldots B_m\!:\;\ldots\;:\!Z_1\ldots Z_n\!: \;=\; \begin{cases}\text{wie (W . 2) , jedoch \textit{ohne} Kontrak–}\\ \text{tionen \textit{innerhalb} der Normalprodukte ,}\end{cases} \qquad \text{(W . 3)}$$

wobei die Felder eines Blockes die gleiche Zeitmarke haben. Hat ein Block nur ein Mitglied, so entfällt das entsprechende Doppelpunkt–Paar. Eine (zeitgeordnete) bunte Folge von Einzel–Operatoren und Blöcken ist also Spezialfall von (W . 3) . Aus dem gleichen Grunde folgt (W . 2) aus (W . 3) . Und (W . 1) folgt aus (W . 2) indem man das Alphabet mit künstlichen Zeitmarken versieht (die größte an A).

Folgerung :

$$\langle 0|\mathcal{T}\,:\!A_1\ldots\!:\;\ldots\;:\!\ldots Z_n\!:|0\rangle \;=\; \sum \begin{cases}\text{über alle Möglichkeiten, } A_1 \text{ bis } Z_n \text{ vollständig zu verpaaren,}\\ \text{d.h. als Produkt von Kontraktionen } \underbracket{A\,B} \text{ zu schreiben,}\\ \text{unter Verbot von } \underbracket{\;\;} \text{ innerhalb normalgeordneter Blöcke.}\end{cases} \qquad \text{(W . 4)}$$

Bei ungerader Anzahl von Feldern bleibt die Kuppelei unvollständig $\Rightarrow$ (W . 4) gibt Null.

• Um (W . 1) zu verstehen, beginnen wir mit einem Alphabet aus zwei Buchstaben ($[\;,\;]_+ := \{\;,\;\}$) :

$$AB - :\!AB\!: \;=\; (A_v + A_e)\,(B_v + B_e) - (A_vB_v + A_eB_v \mp B_eA_v + A_eB_e) \;=\; [A_v, B_e]_\pm$$

$$=\; \langle 0|\,[A_v, B_e]_\pm\,|0\rangle \;=\; \langle 0|A_vB_e|0\rangle \;=\; \langle 0|AB|0\rangle \qquad \Rightarrow \qquad AB = :\!AB\!: + \overbracket{AB} \qquad \text{(W . 5)}$$

Bei drei Feldern $ABC = \;:\!AB\!:C + \overbracket{AB}\,C$ gilt es, C unter die Normalordnung zu bekommen. Fingerübung : $:\!AB\!:\!C = \;:(A_v + A_e)\,(B_v + B_e):(C_v + C_e) = \;:\!ABC\!: + :\!A\,\overbracket{BC}\!: + :\overbracket{ABC}:$, wobei die beiden Kommutatoren entstehen, wenn C_e auf B_v und A_v trifft. Allgemein :

$$:\!AB\ldots Y\!:Z \;=\; :\!A\ldots Z\!: + :\!A\ldots\overbracket{YZ}\!: + :\!A\ldots\overbracket{XYZ}\!: + \ldots + :\overbracket{AB\ldots YZ}: \qquad \text{(W . 6)}$$

(W . 6) enthält (W . 5) weil $AB = \;:\!A\!:\!B$. Mit den elementaren Schritten (W . 5) (Doppelpunkt einbringend in Terme, die noch keinen haben, wobei aber ein weiterer $:$-freier Term entsteht) und (W . 6) (vorhandenen $:$ sich nach rechts fressen lassen) kann man nun (W . 1) generieren. Resultat für das vierbuchstabige Alphabet :

$$\begin{aligned} ABCD \;=\; &:\!ABCD\!: + :\overbracket{AB}\,CD: + :\overbracket{ABC}\,D: + :\overbracket{ABCD}: \\ &+ :\!A\,\overbracket{BC}\,D\!: + :\!A\,\overbracket{BCD}\!: + :\!AB\,\overbracket{CD}\!: \;+\; \overbracket{AB}\;\overbracket{CD} + \overbracket{A\,\overbracket{BC}\,D} + \overbracket{ABC}\,D \end{aligned}$$

• (W . 2) folgt, indem man zuerst die Zeitordnung herstellt ($\eta :=$ Produkt aus Vorzeichen), dann (W . 1) benutzt und schließlich zurücksortiert,

$$\mathcal{T}A\ldots Z \;=\; \eta\,a\ldots z = \eta\left(:\!ab\ldots yz\!: + \sum :\overbracket{a\,b}\,c\ldots yz: + \sum\sum :\overbracket{a\,b}\;\overbracket{c\,d}\ldots yz: + \ldots\right) \;=\; \text{(W . 2)} \quad ,$$

denn, da Zeitordnung vorliegt, sind obige Kontraktionen $\overbracket{a\,b} = \underbracket{a\,b} = \langle 0|\mathcal{T}\,a\,b\,|0\rangle$, und bei Rückschreiben auf A–Z–Reihenfolge werden entsprechende η–Anteile verbraten. Die restlichen η's wandern in Normalprodukte, wo entweder die Umsortierung trivial ist (z.B. bei zwei Vernichtern) oder wegen $:\,:$–Wirkung irrelevant.

• Zu (W . 3) gehen wir (in Gedanken) ebenso vor und beachten, daß wegen der teilweise bereits vorhandenen Normalordnung keine Kontraktionen innerhalb eines Blockes entstehen können. " q. e. d. "

(hschulz@itp.uni-hannover.de)