

Funktionalintegral

Zum einen ist das Funktionalintegral für die Quantenfeldtheorie unverzichtbar (als Formulierungshilfe und um via Faddeev–Popov–Determinante den Eichorbit von Quantisierung auszunehmen). Zum anderen ist es wunderschön weil elegant. Und es bietet einen direkten Zugang zu den Diagrammen der störungstheoretischen Behandlung einer Vielteilchen–Theorie.

Mit der Literatur kann man jedoch seine liebe Not haben Wir stellen hier die Herleitung „auf die Füße“ : Zwischenschritte nicht vorweg sondern erst dann wenn benötigt.

Abers + Lee, Physics Reports 9 C (1973) 1
 Cheng + Li, Gauge theory of elem. part. physics (1984)
 L.H. Ryder, Quantum Field Theory (1985 u. 96)
 A. Das, Field Theory: A Path Integral Approach (1993)
 G. Roepstorff, Path Int. Approach to Quantum Physics (1996)

Daß die ∞ vielen Greenschen Funktionen (\approx volle Information der Theorie)

$$G_n := \langle 0_H | \mathcal{T} \hat{\phi}^H(x_1) \dots \hat{\phi}^H(x_n) | 0_H \rangle \tag{F.1}$$

eines Vielteilchen–Systems das erzeugende Funktional)¹

$$W[j] = \langle 0_H | \mathcal{T} \exp \left\{ i \int d^4x j(x) \hat{\phi}^H(x) \right\} | 0_H \rangle \tag{F.2}$$

haben, ist per

$$G_n = \left(\frac{1}{i} \delta_{j(x_1)} \right) \dots \left(\frac{1}{i} \delta_{j(x_n)} \right) W[j] |_{j=0} \tag{F.3}$$

und

$$W[j] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n G_n(x_1, \dots, x_n) j(x_1) \dots j(x_n) \tag{F.4}$$

direkt klar ($\delta_{f(x)}f(y) := \delta(x - y)$). (F.2) ist der ideale Ausgangspunkt für die nun folgende Herleitung. Wir behandeln alle G_n auf einmal! Die Objekte $\hat{\phi}^H$ sind Bose–Feldoperatoren mit voller Heisenberg–Zeitabhängigkeit. Wir beschränken uns hier auf den Bose–Fall. Um ein Beispiel vor Augen zu haben („ ϕ^4 –Theorie“):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi) \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!}g^2 \phi^4 \quad . \tag{F.5}$$

Das c–Zahl–Quellenfeld $j(x)$ ist beliebig. Da sich jedoch die interessierende Physik in einem endlichen x –Bereich abspielt ($x = t, \vec{r}$), darf j außerhalb desselben rasch abklingen. Diese Philosophie erlaubt uns, das adiabatische Ein– und Ausschalten der Wechselwirkung zu vergessen: H ist nun zeitunabhängig. Der Grundzustand $|0_H\rangle$ von H sei nicht entartet, und die zugehörige Grundzustandsenergie sei Null: $\hat{H}|0_H\rangle = 0$ (Wahl der Energieskala).

Was weiß man schon über das Objekt $|0_H\rangle$ in (F.2). Eine Spur wäre angenehmer (wegen der dann gewonnenen Freiheit der Basiswahl). Nun, es ist einfach, und eine ganz saubere Angelegenheit, diese Spur ins Spiel zu bringen:

$$W[j] = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \text{Sp} \left(e^{-\beta \hat{H}} \mathcal{T} F[\hat{\phi}^H] \right) \quad \text{mit} \quad F[\hat{\phi}^H] := e^{i \int d^4x j(x) \hat{\phi}^H(x)} \tag{F.6}$$

Basis für Spurbildung

Die gesuchte geeignete Basis sollte mit den Operatoren $\hat{\phi}$ zu tun haben. Bei Zeit Null werden diese zu den Schrödinger–Operatoren

$$\hat{\phi}(\vec{r}) = \int d^3k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\varepsilon_k}} \left(\hat{a}_k e^{i\vec{k}\vec{r}} + \hat{a}_k^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right) \quad . \tag{F.7}$$

Sie werden mit kontinuierlichem Parameter \vec{r} abgezählt. Der Index k an \hat{a}, \hat{a}^\dagger sollte eigentlich ein \vec{k} sein (das TEX-t sich nur nicht gut). Zur ϕ^4 –Theorie ist übrigens $\varepsilon_k = \sqrt{m^2 + k^2}$. Die Operatoren $\hat{\phi}$ sind ersichtlich hermitesch. Von den drei kanonischen Quantisierungsregeln (bei equal time Null genommen),

$$\left[\hat{\phi}(\vec{r}), \hat{\Pi}(\vec{r}') \right] = i\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad , \quad \left[\hat{\phi}(\vec{r}), \hat{\phi}(\vec{r}') \right] = 0 \quad , \quad \left[\hat{\Pi}(\vec{r}), \hat{\Pi}(\vec{r}') \right] = 0 \tag{F.8}$$

¹ W ist Cheng + Li's Bezeichnung. Bei „ Z “ (auch üblich) droht Verwechslung mit Zustandssumme in thermischer Feldtheorie.

interessiert im Moment nur die mittlere. Sie besagt, daß es ein simultanes Eigenfunktionen-System aller $\hat{\phi}$'s gibt (Erinnerung: $[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \Rightarrow \exists |a, b\rangle$ mit $\hat{A}|a, b\rangle = a|a, b\rangle$ und $\hat{B}|a, b\rangle = b|a, b\rangle$). Ein Blick auf die Fourier-Umkehr von (F.7) zeigt, daß diese simultanen Eigenfunktionen ein VONS (Vollständiges Orthonormalsystem) des interessierenden Hilbert-Raumes bilden. Ein Zustand aus dieser Basis ist durch Angabe eines Satzes von reellen Eigenwerten $\phi(\vec{r})$ charakterisiert, durch eine Feldkonfiguration $\{\phi\}$ also:

$$\hat{\phi}(\vec{r}) |\{\phi\}\rangle = \phi(\vec{r}) |\{\phi\}\rangle \quad (\text{F.9})$$

Um des Himmels willen schreibe man nicht (Konfiguration meined) „ $\phi(\vec{r})$ “ in den ket-Vektor wegen des dann naheliegenden Denkfehlers, das äußere \vec{r} habe mit jenem innerhalb zu tun.

In obiger Eigenwertgleichung läßt sich zwanglos, nämlich durch Multiplikation mit $e^{i\hat{H}t}$, der Heisenberg-zeitabhängige Operator $\hat{\phi}^H = e^{i\hat{H}t}\hat{\phi}(\vec{r})e^{-i\hat{H}t}$ einbringen:

$$\hat{\phi}^H |\{\phi\}, t\rangle = \phi(\vec{r}) |\{\phi\}, t\rangle \quad \text{mit} \quad |\{\phi\}, t\rangle := e^{i\hat{H}t} |\{\phi\}\rangle \quad . \quad (\text{F.10})$$

Zu einem festen t -Wert t_0 (Spezifikation später) soll sie dies nun sein, die geeignete Basis im Raum der Feldoperatoren:

$$\text{Basis} = |\{\phi\}, t_0\rangle \quad , \quad \text{Summation in der Spur} = \mathcal{N} \prod_{\vec{r}} \int d\phi(\vec{r}) =: \int_{\vec{r}} \mathcal{D}\phi \quad . \quad (\text{F.11})$$

Stop! Langsam. Drei betrugsverdächtige Eigenartigkeiten sind zu studieren.

1 . Rechts in (F.11) integriert jemand offenbar kontinuierlich über *alle* reellen ϕ -Werte. Das kontinuierliche Spektrum zu (F.9) mag plausibel sein. Jedoch, man zeige. Wir halten \vec{r} fest, betrachten also *einen* der vielen Operatoren (F.7), und setzen $\hat{a}_k e^{i\vec{k}\vec{r}} =: \hat{a}_k \rightarrow \sqrt{\varepsilon_k/2} x_k + \sqrt{1/(2\varepsilon_k)} \partial_{x_k}$, wobei zuletzt in eine \vec{r} -spezifische Ortsdarstellung (dort und „in Feldrichtung“) übergegangen wurde. Dabei wird $\hat{\phi}$ zu einem Operator, welcher mit $[(2\pi)^{-3/2} \int d^3k x_k]$ multipliziert. Das genügt. Gemäß $[\]\varphi(\{x_k\}) = a\varphi(\{x_k\}) \Rightarrow \varphi = g(\text{Rest}) \cdot \delta([\] - a)$ füllen die Eigenwerte a die gesamte reelle Achse. *Rest* steht für alle anderen Kombinationen der Kunstvariablen x_k (weitere Betrachtungen möglich, aber hier irrelevant).

2 . Zeitentwicklung erfolgt mit $e^{-i\hat{H}t}$. Aber rechts in (F.10) steht an $i\hat{H}t$ das „falsche“ Vorzeichen. Nanu. Die Bedeutung des t -Arguments in $|\{\phi\}, t\rangle$ klärt sich auf anhand des Ortsoperators X eindimensionaler Quantenmechanik. $X \langle x|h\rangle := x \langle x|h\rangle$ erklärt die Wirkungsweise von X („ h “ steht für allgemeinen Hilbert-Vektor). Seine Eigenwertgleichung lautet also $(x - a) \langle x|a\rangle = 0 \Rightarrow \langle x|a\rangle = \delta(x - a)$. Ein δ -Paket zerfließt. Liege δ , d.h. $|a\rangle$, zur Zeit t_2 vor, und werde das Zerflossene zu t_1 angesehen: $|a, t_1, t_2\rangle$ mit $|a, t_2, t_2\rangle = |a\rangle$, und wir haben $|a, t_1, t_2\rangle = e^{-i\hat{H}(t_1-t_2)}|a\rangle$ aufzuschreiben. Also ist $|a, 0, t\rangle = e^{i\hat{H}t}|a\rangle$ der zur Zeit 0 angesehene, zu t lokalisierte Zustand. Ersichtlich wird mit t in $|\{\phi\}, t\rangle$ nur der Lokalisierungszeitpunkt angegeben. Punkt.

3 . Spur zu bilden heißt, alle Erwartungswerte zu addieren. Bei Quantenzahl-Kontinuum ist diese Addition ein Integral, zur Basis (F.11) also ein Integral über alle Feldkonfigurationen — ein Funktionalintegral. Es gibt viele Möglichkeiten, das Kontinuum der Feldkonfigurationen zu parametrisieren (man denke etwa an Fourier-Transformierte von $\phi(\vec{r})$). Rechts in (F.11) steht also nur eine spezielle Version: ein Integral an jedem Punkt des diskretisierten 3D Raumes und ein Maßfaktor \mathcal{N} . Er bedarf oft keiner Explizierung, weil nur $\ln(W)$ interessiert (s.u.). Mitunter wird er auch rechts vor $\int_{\vec{r}}$ geschrieben. Wir haben ihn hier per def. im Symbol \mathcal{D} absorbiert. Der Index am Integral gibt an, *welcher* Raum mit Integralen ausgestattet wurde. Später wird nämlich noch die Zeitachse hinzukommen und ein $\mathcal{N} \prod_t \int_{\vec{r}} \mathcal{D}\phi = \int_x \mathcal{D} =: \int \mathcal{D}$ entstehen.

Imaginärzeit β

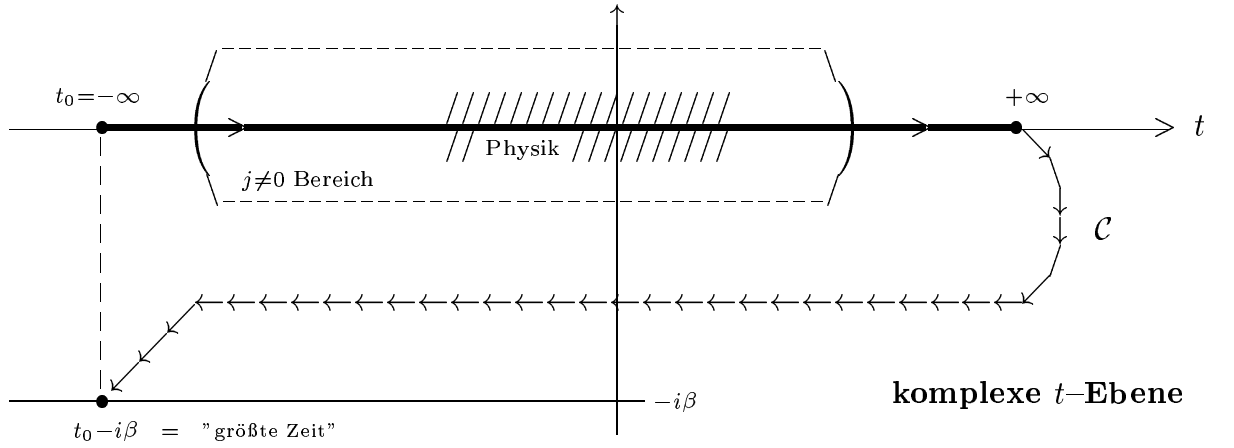
Mittels Basis und Spursummutation aus (F.11) nimmt $W[j]$, (F.6), die Gestalt

$$W[j] = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\vec{r}} \mathcal{D}\phi \langle \{\phi\}, t_0 | e^{-\beta \hat{H}} \mathcal{T} F | \{\phi\}, t_0 \rangle \quad (\text{F.12})$$

an. Auch die t_0 -Abhängigkeit des bra-Vektors läßt sich als e-Funktion explizieren. Und schon naht die altehrwürdige Idee (Matsubara?), die beiden e's zu verheiraten:

$$\langle \{\phi\}, t_0 | e^{-\beta \hat{H}} = \langle \{\phi\} | e^{-i \hat{H} t_0} e^{-\beta \hat{H}} = \langle \{\phi\} | e^{-i \hat{H} (t_0 - i\beta)} = \langle \{\phi\}, t_0 - i\beta | \quad (\text{F.13})$$

Auch in $F = e^i \int d^4x j(x) \hat{\phi}^H(x)$ gibt es Zeiten. Sie stehen in j und $\hat{\phi}^H$ und laufen von $-\infty$ bis ∞ . Wegen des eingangs erwähnten j -Abfalls können diese Grenzen auch bei sehr groß/klein liegen. Lesen wir also Physiker-like „ ∞ “ als „sehr groß“. Wie könnte man diese vier Zeiten in Beziehung setzen? Der Parameter t_0 ist noch (reell) wählbar. Wir legen ihn auf $-\infty$ (phys-like). Die obere Integrationsgrenze $+\infty$ läßt sich nun mit $t_0 - i\beta$ so verbinden, daß man dabei außerhalb des $j \neq 0$ -Bereiches bleibt (man bedenke $\beta \rightarrow \infty$):



Auf der so entstandenen Kurve \mathcal{C} in der komplexen t -Ebene geben wir die Integrationsrichtung an. Auch die Zeitordnung \mathcal{T} läßt sich zwanglos verallgemeinern auf eine solche längs \mathcal{C} . Nun ist solcherlei Denkungsart zwar hier (bei $T = 0$) ohne Relevanz, wohl aber bei thermischer Feldtheorie (β endlich). Die (neu zu definierenden) Temperatur-Greens-Funktionen sind dann kontur-spezifische Objekte. Nichtsdestotrotz ist nun das erste der vier Integrale in F zu einem Kurvenintegral längs \mathcal{C} in der komplexen t -Ebene geworden. Die obere Integrationsgrenze stimmt mit der Zeit im bra-Vektor überein, die untere mit jener im ket. Zwischenresultat:

$$W[j] = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\vec{r}} \mathcal{D}\phi \langle \{\phi\}, -\infty - i\beta | \mathcal{T} e^{i \int_C d^4x j(x) \hat{\phi}^H(x)} | \{\phi\}, -\infty \rangle \quad (\text{F.14})$$

Diskretisierung der Zeitkontur \mathcal{C}

Es gilt, das Matrixelement in (F.14) weiter zu verarzten. Für obige Zeitmarken empfiehlt sich jetzt eine abstraktere Notation: größte Zeit t' (statt $-\infty - i\beta$) und kleinste t (statt $-\infty$). Die e-Funktion schreiben wir als Reihe. Der erste Term, welcher von Zeitordnung \mathcal{T} Notiz nimmt, ist der in j quadratische (Abkürzung: $\theta_{12} := \theta(t_1 - t_2)$):

$$W_{\text{qu. in } j} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\vec{r}} \mathcal{D}\phi \left(-\frac{1}{2}\right) \int_C d^4x_1 \int_C d^4x_2 j(x_1) j(x_2) \{ \theta_{12} M_1 + \theta_{21} M_2 \} \quad (\text{F.15})$$

$$M_1 := \langle \{\phi\} | e^{-i \hat{H}(t' - t_1)} \hat{\phi}(\vec{r}_1) e^{-i \hat{H}(t_1 - t_2)} \hat{\phi}(\vec{r}_2) e^{-i \hat{H}(t_2 - t)} | \{\phi\} \rangle, \quad M_2 := M_1^{x_1 \leftrightarrow x_2} \quad (\text{F.16})$$

Nicht wahr, die Zeiten stehen gar wohlgeordnet in M_1 herum, von links nach rechts abnehmend (in M_2 ebenfalls). Die $\hat{\phi}$ -Operatoren werden zu ihren Eigenwerten, wenn wir (unmittelbar rechts von ihnen) geschickte 1-Operatoren einschieben. Welche? volle! d.h. $|\{\phi\}\rangle\langle\{\phi\}|$, verbunden mit funktionalintegralischer Summation:

$$M_1 = \int_{\vec{r}} \mathcal{D}\phi'' \int_{\vec{r}} \mathcal{D}\phi' \phi''(\vec{r}_1) \phi'(\vec{r}_2) \cdot \langle\{\phi\}| e^{-i\hat{H}(t'-t_1)} |\{\phi''\}\rangle \langle\{\phi''\}| e^{-i\hat{H}(t_1-t_2)} |\{\phi'\}\rangle \langle\{\phi'\}| e^{-i\hat{H}(t_2-t)} |\{\phi\}\rangle . \quad (\text{F.17})$$

Hätten wir sieben $\hat{\phi}$'s aus F entnommen, dann stünden hier sieben $\mathcal{D}\phi$ -Integrale gefolgt von acht Matrixelementen. Solche Matrixelemente der Form $\langle\{\phi'\}| U |\{\phi\}\rangle$ sind nun zu studieren, wobei $U := e^{-i\hat{H}(t'-t)}$. Die angekündigte Diskretisierung erfolgt jetzt, nämlich als Zerlegung $t' - t = n \delta t$. Da \hat{H} zeitunabhängig, folgt schlicht $U = u^n$ mit $u := e^{-i\hat{H}\delta t}$. Vorerst muß die natürliche Zahl n nicht einmal groß sein,

$$\langle\{\phi'\}| U |\{\phi\}\rangle = \int_{\vec{r}} \mathcal{D}\phi_{n-1} \dots \int_{\vec{r}} \mathcal{D}\phi_1 \langle\{\phi'\}| u |\{\phi_{n-1}\}\rangle \cdot \langle\{\phi_{n-1}\}| u |\{\phi_{n-2}\}\rangle \langle\{\phi_{n-2}\}| u |\{\phi_{n-3}\}\rangle \dots \langle\{\phi_1\}| u |\{\phi\}\rangle , \quad (\text{F.18})$$

aber der nächste Schritt braucht ersichtlich riesiges n und infinitesimales δt :

$$\langle\{\phi_1\}| u |\{\phi\}\rangle = \langle\{\phi_1\}| 1 - i\hat{H}\delta t |\{\phi\}\rangle = \langle\{\phi_1\}| \{\phi\}\rangle - i\delta t \langle\{\phi_1\}| \hat{H} |\{\phi\}\rangle . \quad (\text{F.19})$$

Wie \hat{H} zur klassischen Hamiltonfunktion wird

Der Hamilton-Operator einer bosonischen Feldtheorie hat zumeist die Struktur

$$\hat{H} = \int d^3r \hat{\mathcal{H}} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \hat{\Pi}^2 + V(\hat{\phi}) . \quad (\text{F.20})$$

Jedenfalls unterstellen wir hier diese Struktur. Die Impulsdichte möge durch $\hat{\Pi} = \partial_\phi \mathcal{L} = \dot{\phi}$ gegeben sein. Zur ϕ^4 -Theorie ist das so, und überdies $\hat{V} = \frac{1}{2}(\nabla\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2 + \frac{1}{4!}g^2\hat{\phi}^4$. In (F.19) ersetzt sich \hat{V} durch seinen Eigenwert $V(\phi)$ (keine Angst bei $\nabla\hat{\phi} \rightarrow \nabla\phi$: wende in Gedanken ∇ auf (F.9) an). Soll sich auch $\hat{\Pi}$ durch Eigenwert ersetzen, ist eine 1 aus deren Eigenzuständen einzuschieben. Diese Eins, die gibt es. Weil der dritte *equal time* Kommutator in (F.8) verschwindet, haben auch die ∞ vielen $\hat{\Pi}$'s ein simultanes Eigenfunktionen-System:

$$\hat{\Pi}(\vec{r}) |\{II\}\rangle = II(\vec{r}) |\{II\}\rangle , \quad II(\vec{r}) \text{ kontinuierlich reell von } -\infty \text{ bis } \infty , \quad (\text{F.21})$$

wobei der Beweis (Übungsaufgabe) für die rechtsstehende Aussage jenem unter (F.11) sehr ähnelt. Damit geht (F.19) über in

$$\langle\{\phi_1\}| u |\{\phi\}\rangle = \int_{\vec{r}} \mathcal{D}II \langle\{\phi_1\}| \{II\}\rangle \langle\{II\}| \{\phi\}\rangle e^{-i\delta t \int d^3r [\frac{1}{2}II^2 + V(\phi)]} , \quad (\text{F.22})$$

wobei im letzten Schritt auch noch $1 - i\delta t \dots$ in $e^{-i\delta t \dots}$ rückverwandelt wurde. Da steht sie im Exponenten, die klassische Hamiltonfunktion. Kommentar zu zwei delikaten Schritten:

1 . Jenes δt -Herunter-Herauf war nicht wirklich nötig. Man kann auch bei $u = e^{-i(\hat{T}+\hat{V})\delta t}$ bleiben, $e^{A+B} = e^A e^B e^{[B,A]/2 + \dots}$ bedenken, den dritten Exponenten als $\sim \delta t^2$ weglassen und die II -Eins zwischen e^A und e^B einschieben. Bald werden per $n \cdot \delta t$ endliche Terme entstehen, s. (F.25). $n \cdot \delta t^2$ bleibt im limes vernachlässigbar. Alles in Ordnung.

2 . Haben wir nicht soeben verstoßen gegen die Festlegung $\hat{H} |0_H\rangle = 0$?! Normalordnung von (F.20) wurde versäumt, weil ohne dieselbe die Schritte zu (F.22) funktionieren. Um es kurz

zu halten, jene vielen $\frac{1}{2}\hbar\omega$'s (samt ihrer Verschiebungen durch Wechselwirkung) sind wieder mit dabei und modifizieren den W -Vorfaktor sowie Renormierungskonstanten. Also erschrecke man nicht, wenn einmal dieses Geschäft ansteht und repariere *dann* — mit Verstand.

{ ϕ } – Darstellung

Die weitere Auswertung braucht das Skalarprodukt $\langle \{II\} | \{\phi\} \rangle$ explizit. Gleich ist Weihnachten. Wir starren auf den noch nicht benutzten, ersten Kommutator in (F.8) und lesen $i\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ als $i\delta_{\phi(\vec{r})} \phi(\vec{r}')$. Damit wird klar, wie eine $\langle \{\phi\} | h \rangle$ -Darstellung zu stricken ist. $\hat{\phi}$ wird zu einem Operator, welcher nur mit $\phi(\vec{r})$ multipliziert ($\langle \{\phi\} | \hat{\phi} | \{\phi'\} \rangle \langle \{\phi'\} | h \rangle = \phi \cdot \langle \{\phi\} | h \rangle$), und $\hat{\Pi}$ wird $-i\delta_{\phi(\vec{r})}$. Auch nach dieser Übersetzung gelten alle Kommutatorausagen. Das gesuchte Skalarprodukt erfüllt $-i\delta_{\phi(\vec{r})} \langle \{\phi\} | \{II\} \rangle = \Pi(\vec{r}) \langle \{\phi\} | \{II\} \rangle$. Die Lösung dieser funktionalen Dgl läßt sich raten,

$$\langle \{\phi\} | \{II\} \rangle \sim e^{i \int d^3r \Pi(\vec{r}) \phi(\vec{r})}, \quad (\text{F.23})$$

und in (F.22) einsetzen:

$$\langle \{\phi_1\} | u | \{\phi\} \rangle \sim \int_{\vec{r}} \mathcal{D}\Pi e^{i \int d^3r \{ \Pi(\phi_1 - \phi) - \delta t [\frac{1}{2}\Pi^2 + V(\phi)] \}}. \quad (\text{F.24})$$

In (F.18) gibt es n solcher Matrixelemente, also auch n zu unterscheidende Π -Integrationen:

$$\begin{aligned} \langle \{\phi'\} | U | \{\phi\} \rangle &\sim \int_{\vec{r}} \mathcal{D}\phi_{n-1} \dots \int_{\vec{r}} \mathcal{D}\phi_1 \int_{\vec{r}} \mathcal{D}\Pi_n \dots \int_{\vec{r}} \mathcal{D}\Pi_1 \cdot \\ &\cdot e^{i \int d^3r \sum_{j=1}^n \{ \Pi_j(\phi_j - \phi_{j-1}) - \delta t [\frac{1}{2}\Pi_j^2 + V(\phi_{j-1})] \}}. \end{aligned} \quad (\text{F.25})$$

In der j -Summe sind zwei UFO's übrig geblieben (ϕ_n, ϕ_0), und rechts vermißt man die Abhängigkeit von den $\{\phi'\}$ - und $\{\phi\}$ -Konfigurationen. Nach Blick auf (F.18): ϕ_n ist ϕ' , und ϕ_0 ist ϕ . Im V -Term (bereits von endlicher Ordnung $n \cdot \delta t$) darf das Argument ϕ_{j-1} durch ϕ_j ersetzt werden. Und die Klammer $(\phi_j - \phi_{j-1})$ ist der Zähler des Differenzenquotienten auf der diskretisierten t -Achse, ergo $(\phi_j - \phi_{j-1}) = \delta t \dot{\phi}_j$. Der Exponent von (F.24) lautet jetzt $i \int d^3r \delta t \sum_{j=1}^n \{ \Pi_j \dot{\phi}_j - \frac{1}{2}\Pi_j^2 - V(\phi_j) \}$. Freie Variable in (F.25) ist nur noch jene im bra-Vektor, nämlich $\{\phi_n\} \equiv \{\phi'\}$.

Hamilton \longrightarrow Lagrange

Jene Vielfachprodukte aus räumlichen Funktionalintegralen in (F.25) – haben wir nicht ein Wahrnehmungsraster dafür „was das ist“? An jedem Feld (oder Feldkonfiguration) hätten wir eine Zeitmarke stehen lassen können. (F.17) zeigt noch welche. Sodann war das Stück Zeit(kontur)achse unterteilt worden: an jedem Teilstrich lebt ein ϕ (ϕ_{n-1} am linkensten), und die Π -Integrale können wir den Lücken zuordnen. Kurz, in (F.25) stehen zwei raumzeitliche Funktionalintegrale. Welches Zeitachsenstück sie erfassen, zeigt das Integral im Exponenten:

$$\langle \{\phi'\} | U | \{\phi\} \rangle \sim \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\Pi e^{i \int_t^{t'} dt \int d^3r \{ \Pi \dot{\phi} - \frac{1}{2}\Pi^2 - V(\phi) \}} \quad (\text{F.26})$$

mit natürlich t', t den Zeitmarken von $\{\phi'\}$ bzw. $\{\phi\}$. Sagt da einer: „Aah, in der geschwungenen Klammer steht sie ja schon, die Lagrange-Dichte“. Falsch! L gewinnt man aus H durch Auflösen von $\dot{q} = \partial_p H$ nach p und Eliminieren von p in $p\dot{q} - H$. Hiervon kann in (F.26) keine Rede sein. Aber es geht dennoch, und das Zauberwort heißt quadratische Ergänzung:

$$\Pi \dot{\phi} - \mathcal{H}(\Pi, \phi) = -\frac{1}{2} (\Pi - \dot{\phi})^2 + \mathcal{L}(\dot{\phi}, \phi) \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}(\dot{\phi}, \phi) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad . \quad (\text{F.27})$$

Das Gauß-Integral über alle Π 's kann nun ausgeführt und als Konstante im Proportionalitätsfaktor absorbiert werden. Fazit:

$$\langle \{\phi'\} | e^{-i\hat{H}(t'-t)} | \{\phi\} \rangle \sim \int \mathcal{D}\phi e^{i \int_t^{t'} dt \int d^3r \mathcal{L}(\dot{\phi}, \phi)} \quad (\text{F.28})$$

Nur e i n $\int \mathcal{D}\phi$

Inzwischen sind wir im Rückwärtsgang bei (F.17) angekommen. Dort stehen drei solche Apparate der Form (F.28), und zwar so, daß die Zeitmarken der „Apparate“ aneinander anschließen. Natürlich möchten wir die zugehörigen drei Integrale gern zu einem einzigen von $t = -\infty$ bis $t' = -\infty - i\beta$ zusammenfassen. Wir erinnern uns, daß in (F.28) die „n-te“ $\{\phi\}$ -Integration fehlte. In (F.17) bleiben darum Lücken an den zwei Nahtstellen zwischen Matrixelementen. Nun, genau diese zwei Lücken werden gefüllt von den beiden Integrationen am Beginn von (F.17). Die Bildung eines einzigen raumzeitlichen Funktionalintegrals gelingt also. Nur wollen nun die beiden Funktionen ϕ'' und ϕ' unbedingt ihre Zeitmarken (t_1 bzw. t_2 statt der Striche, $(t_1, \vec{r}_1) = x_1$) zurück haben, damit sie vom overall-Funktionalintegral an der richtigen Stelle der Zeitachse erfaßt werden:

$$M_1 = \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) e^{i \int_c d^4x \mathcal{L}(\dot{\phi}, \phi)} \quad (\text{F.29})$$

Übrigens sind auch die \vec{r} -Argumente schon längst nur noch „Marken“. Ferner haben wir Proportionalitätsfaktoren im Maß von $\int \mathcal{D}$ verschwinden lassen. Man bestimmt letzteres ohnehin nachträglich (falls überhaupt benötigt). In (F.16) gab es auch noch das Matrixelement M_2 . Vertauschung von x_1 mit x_2 bleibt aber dank (F.29) ohne Effekt. Das Funktionalintegral ist clever, es zieht veränderte Zeitmarken automatisch an der richtigen Stelle in betracht. Mit $M_1 = M_2$ entfallen in (F.15) die Stufenfunktionen: $\theta_{12} + \theta_{21} = 1$. Und nun? Wir hatten exemplarisch den j^2 -Term von W untersucht. Jedes $j(x)$ findet sein $\phi(x)$ im funktionalen Integranden, und jedes dieser Paare hat sein eigenes $\int_c d^4x$. Verallgemeinerung und Wiederaufsummation der e-Reihenterme erweisen sich also als einfach. Wir sind so weit

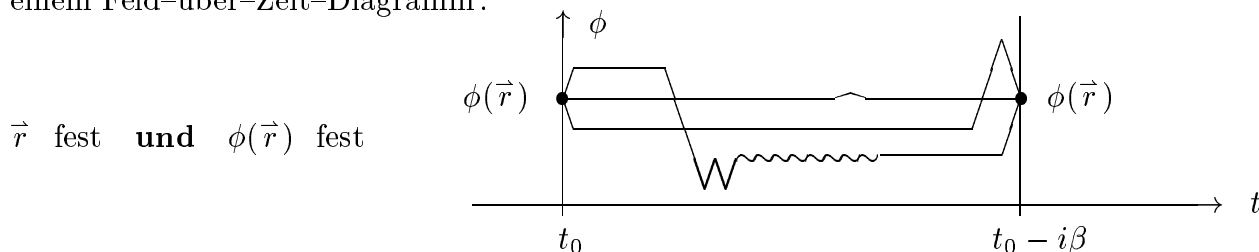
$$W[j] = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int_c d^4x (\mathcal{L} + j\phi)}$$

(F.30)

— aber noch nicht fertig. Im Erfolgsrausch ist uns nämlich eine Feinsinnigkeit abhanden gekommen. Vor (F.28) gab es ein $2 \neq 3$: zwei Lücken gefüllt, aber es hatten drei „n-te“ Integrationen gefehlt. Woher kam die dritte?

Bose – Periodizität

Die „dritte Integration“ hatte ganz links in (F.14) gestanden und kam von der Spur (F.10). Wie schon in (F.12) (und in M_1 , (F.16), besonders augenfällig) steht darum im bra links und im ket rechts die gleiche Feldkonfiguration. Lediglich ihre Zeitmarke hatte sich in zwei verschiedene geteilt. Die letzte funktionale ϕ -Integration ist also eingeschränkt. Halten wir (an einer bestimmten Stelle \vec{r}) deren Integranden fest, dann verbleiben Wege (darum *path integral*) in einem Feld-über-Zeit-Diagramm:



Da sich der Startzeitpunkt t_0 (wir haben natürlich an $-\infty$ gedacht, aber lediglich außerhalb physics sollte er liegen) verschieben läßt, sei die genannte Eigenschaft in der Form

$$\phi(t - i\beta, \vec{r}) = \phi(t, \vec{r}) \quad (\text{F.31})$$

notiert. In $\Im m(t)$ -Richtung haben die (unter dem Funktionalintegral klassisch-gewordenen) Bose-Felder also die Periode β . Für Fermi-Felder bekommt die rechte Seite von (F.31) übrigens ein Minuszeichen. All dies macht sich wichtig (und bleibt richtig), wenn man die „Temperatur-Greens-Funktionen“ definiert (wie (F.1), aber als thermisches Mittel statt 0_H -Erwartungswert), β endlich bleibt und die Kontur \mathcal{C} mitten in der „physics“ liegt.

Wer da ein kalter $T=0$ -Physiker ist, wird wohl (F.31) als Spitzfindigkeiten abtun (dürfen) und die Kurve- \mathcal{C} -Spezialitäten wieder vergessen. Er denkt nur noch an das reelle Stück t -Achse von \mathcal{C} , und alle die schönen weiteren Manipulationen (s.u.), die man mit (F.30) anstellen kann, gehen gut. Wir aber behalten im Kopf, daß *saubere Feldtheorie ein Temperatur-gegen-Null limes ist*.

Nutzen

Der Nutzen der Darstellung (F.30) wird sofort offenbar, wenn es an die Störungsreihe einer wechselwirkenden Theorie geht, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}$. (F.30) enthält nur noch c-Zahl-Felder. Alle Vertauschungs-Bauchschmerzen entfallen also, wenn wir in zwei e-Funktionen aufspalten:

$$W[j] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi]} e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0[\phi] + j\phi)} = e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}[\frac{1}{i}\delta_{j(x)}]} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + j\phi)}. \quad (\text{F.32})$$

Anders als in (F.3) erzeugt die Funktionalableitung jetzt klassische Felder statt Operatoren. Diese bleiben natürlich unter dem Funktionalintegral stehen. Rechts in (F.32) haben die vor das Integral gezogenen Operatoren nichts mehr mit ϕ zu tun, sie sind scharf auf j -Werte.

Es kommt noch schöner, und das beschert uns die Fourier-Transformation:

$$\phi(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^4k e^{-iKx} \tilde{\phi}(K) \quad , \quad \tilde{\phi}(K) = \int d^4x e^{iKx} \phi(x) \quad . \quad (\text{F.33})$$

Aus der Definition $\delta_{j(x)} j(y) = \delta(x-y)$ folgt per Anwenden von $\int d^4y e^{iKy}$, daß

$$\delta_{j(x)} \tilde{j}(K) = e^{iKx} \quad \text{und somit} \quad \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^4x e^{-iQx} \delta_{j(x)} \tilde{j}(K) = \delta(K-Q) = \delta_{\tilde{j}(Q)} \tilde{j}(K) \quad .$$

Da beliebig, kann $\tilde{j}(K)$ entfallen, und wir erhalten (samt ihrer Umkehrung) die Operator-Identität

$$\delta_{\tilde{j}(K)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^4x e^{-iKx} \delta_{j(x)} \quad , \quad \delta_{j(x)} = \int d^4k e^{iKx} \delta_{\tilde{j}(K)} \quad . \quad (\text{F.34})$$

Beachte die andere $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4$ -Stellung. Die rechte dieser beiden Gleichungen kann direkt in (F.32) verwendet werden, nämlich rechts in \mathcal{L}_{int} . Also versuchen wir, auch das nachfolgende Funktionalintegral in die Fourier-Unterwelt zu verfrachten. Der Raum der Feldkonfigurationen kann, statt per $\int \mathcal{D}\phi(x)$, ebensogut auch mittels $\int \mathcal{D}\tilde{\phi}(K)$ erfaßt werden. Bleibt der Integrand. \mathcal{L}_0 ist in der Regel eine quadratische Form aus Feldern mit irgendwelchen Differential-Operatoren dazwischen. So etwas diagonalisiert der Herr Fourier besonders gern. Sei $1/\Delta(K)$ der Ausdruck (der diagonale Kern), welcher sodann zwischen zwei $\tilde{\phi}$ -Feldern erscheint:

$$i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + j\phi) = i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^4k \left[\frac{1}{2} \tilde{\phi}(-K) \frac{1}{\Delta(K)} \tilde{\phi}(K) + \tilde{j}(-K) \tilde{\phi}(K) \right] . \quad (\text{F.35})$$

$\Delta(K)$ ist eine reelle, gerade Funktion von K (oder kann in der Bildung (F.35) durch ihren geraden Anteil ersetzt werden). Falls $\tilde{\phi}$ Indizes trägt und Δ Matrix ist, dann $\Delta = \Delta^T$. Im Integral über $\tilde{\phi}(K)$ an der Stelle K (also in jedem der ∞ vielen Integrale) kann die Verschiebung $\tilde{\phi} \rightarrow \tilde{\phi} - \tilde{j}\Delta$ vorgenommen werden:

$$i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + j\phi) \rightarrow i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^4k \left[\frac{1}{2} \tilde{\phi}(-K) \frac{1}{\Delta(K)} \tilde{\phi}(K) - \frac{1}{2} \tilde{j}(-K) \Delta(K) \tilde{j}(K) \right] . \quad (\text{F.36})$$

Wird nun das gaußische Funktionalintegral ausgeführt (eine j -unabhängige Konstante liefernd, absorbierbar im funktionalen Maß), dann ist es weg. Übrig bleibt

$$W[j] = \frac{e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}} \left[\frac{1}{i} \int d^4k e^{iKx} \delta_{\tilde{j}(K)} \right]}}{\text{Zähler } [\tilde{j}=0]} W_0[\tilde{j}] , \quad W_0[\tilde{j}] := e^{-i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^4q \frac{1}{2} \tilde{j}(-Q) \Delta(Q) \tilde{j}(Q)} . \quad (\text{F.37})$$

Links in (F.37) haben wir uns (endlich) erinnert, daß die Normierung von W bereits durch (F.2) festgelegt war: $W[j=0] = 1$.

In aller Regel interessiert auch von den Greenschen Funktionen nur die Fourier-transformierte Version. Hierzu gibt es eine Feinsinnigkeit, wie diese zu definieren sei. Das Vakuum $|0_H\rangle$ ist translationsinvariant. Also geht G_n in sich über, wenn man alle Variablen x um die gleiche *toy*-Variable y verschiebt: $G_n = G_n(x_1 + y, \dots, x_n + y) = G_n(x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n, 0)$. Wenn man nun nach *allen* Variablen Fourier-entwickelt (Doppel-Schlange bedeute „nach allen“), dann erwarten wir eine overall-Deltafunktion via

$$\begin{aligned} \tilde{G}_n &= \int d^4x_1 e^{iK_1x_1} \dots \int d^4x_n e^{iK_nx_n} G_n(x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n, 0) \\ &= \int d^4x_1 \dots d^4x_{n-1} e^{iK_1x_1 \dots iK_{n-1}x_{n-1}} G_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \int d^4x_n e^{i(K_1 + \dots + K_n)x_n} \\ &=: (2\pi)^4 \delta(K_1 + \dots + K_n) \tilde{G}_n . \end{aligned} \quad (\text{F.38})$$

„Green’s function in momentum space“ verweist auf diese harmlose Gewichtsfunktion \tilde{G}_n , $\tilde{G}_2(K)$ ist die Fourier-Transformierte von $G_2(x_1, x_2)$ bezüglich Differenz-Argument $x := x_1 - x_2$.

Zur Sache. Wir bilden \tilde{G}_n von (F.3) und setzen dort die rechte Formel von (F.34) ein:

$$\tilde{G}_n = \mathcal{Q}_1 \dots \mathcal{Q}_n W[\tilde{j}] |_{\tilde{j}=0} = \frac{1}{\mathbf{c}} \mathcal{Q}_1 \dots \mathcal{Q}_n e^{i \int \mathcal{L}_{\text{int}}[\dots]} W_0[\tilde{j}] |_{\tilde{j}=0} \quad ! \quad (\text{F.39})$$

mit $\mathcal{Q}_m := \frac{1}{i} \int d^4x_m e^{iK_mx_m} \int d^4q e^{iQx_m} \delta_{\tilde{j}(Q)} = (2\pi)^4 \frac{1}{i} \delta_{\tilde{j}(-K_m)} . \quad (\text{F.40})$

Man begreife, daß der Gipfelpunkt erreicht ist. In $W_0[\tilde{j}]$ steht der nackte Propagator, eingebettet in Quellenfelder. Der gesamte Wechselwirkungs-Effekt steht aufsummiert und in Operator-Form davor. Das Anbringen von Beinen, d.h. das G_n -Bilden geschieht durch ein paar äußere \tilde{j} -Funktionalableitungen. *Das Graphen-Gebirge liegt vor uns.*

Wenn man nun per (F.39) Diagramme bildet, ergeben sich *auch Wolken* (vacuum-to-vacuum-diagrams). Sie bilden nur einen j -unabhängigen Faktor. Und dieser (Zitat) kürzt sich perfekt gegen den Nenner \mathbf{c} . Greensche Funktionen sind automatisch Wolken-frei. Jedoch sind bei manchen (*disconnected*) G_n -Beiträgen nicht alle Beine mit allen anderen verbunden (z.B. 4 unter sich, und weitere 6 unter sich). Die zugehörige Kombinatorik weist sodann (Zitat) $\ln(W[j]) =: V[j]$ als das erzeugende Funktional der (”total”) connected Greens aus. Wer will, kann weiter mit (F.39) arbeiten, wenn er *discon*’s jeglicher Art (sowie \mathbf{c}) einfach wegläßt. Abschließend sei die Idee notiert, daß man vielleicht sehr viel früher in die Fourier-Unterwelt steigen könnte und daß unser Vorgehen in dieser Hinsicht umständlich war. Ansonsten liegen die Mängel der bisherigen Behandlung in der Beschränkung auf Bose-Felder ohne Eichfreiheit.

diagrams and rules

Um zu guter Letzt konkret zu werden, greifen wir auf die ϕ^4 -Spielzeug-Theorie zurück: selbstwechselwirkende neutrale Spin-0-Teilchen. Die ersten beiden Terme in (F.5) bilden \mathcal{L}_0 :

$$i \int d^4x \mathcal{L}_0 = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{\phi}(-K) (K_\mu K^\mu - m^2 + i\varepsilon) \tilde{\phi}(K) \Rightarrow \Delta(K) = \frac{1}{K^2 - m^2 + i\varepsilon} . \quad (\text{F.41})$$

Mit Blick auf $e^{i\int \mathcal{L}_0}$ wurde $i\varepsilon$ von Hand eingefügt, „weil man hier darf“. Nackter Propagator:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2^0 &= \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2 e^{-i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^4q \frac{1}{2} \tilde{j}(-Q) \Delta(Q) \tilde{j}(Q)} \Big|_{\tilde{j} \equiv 0} = \mathcal{Q}_1 [-\Delta(K_2) \tilde{j}(K_2)] e^{-i\int \dots} \Big|_{\tilde{j} \equiv 0} \\ &= (2\pi)^4 \delta(K_1 + K_2) i\Delta(K_2) \Rightarrow \tilde{G}_2^0 = \frac{i}{K^2 - m^2 + i\varepsilon} . \end{aligned} \quad (\text{F.42})$$

Vertex:

$$\begin{aligned} i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}} &= i \left(-\frac{g^2}{4!} \right) \int d^4x \left(\frac{1}{i} \int d^4k_1 e^{iK_1x} \delta_{\tilde{j}(K_1)} \right) \dots \left(\frac{1}{i} \int d^4k_4 e^{iK_4x} \delta_{\tilde{j}(K_4)} \right) , \\ e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}} &= e^{\left(-i \frac{g^2}{4!} \left[\int_1 \dots \int_4 (2\pi)^4 \delta(K_1 + \dots + K_4) \right] \delta_{\tilde{j}(K_1)} \dots \delta_{\tilde{j}(K_4)} \right)} . \end{aligned} \quad (\text{F.43})$$

Der Operator (F.43) geht zurück auf Wilhelm Busch (Hannover). In (F.43) ist der Exponent ein Knoten ($-ig^2$) mit vier Fäden, an dessen Enden die Köder δ hängen. Nähert sich der Hühnerstall $W_0[\tilde{j}] =: \mathbf{e}$, dann kann ein δ zunächst nur $\Delta \tilde{j} \mathbf{e}$ bewirken. Das zweite δ produziert bereits

$$\delta(K_3 + K_4) \Delta \mathbf{e} + \Delta(K_3) \tilde{j}(K_3) \Delta(K_4) \tilde{j}(K_4) \mathbf{e} .$$

Im ersten Term haben sich zwei Linien miteinander kurzgeschlossen (ein Δ , Hühnerstall \mathbf{e} intakt). Im zweiten Term gibt es untere und obere Hühner \tilde{j} . Abwarten. Die restlichen zwei vom gleichen Vertex ausgehenden δ 's können im ersten Term (a) erneut schließen, oder (b) zwei Unter-Hühner freisetzen (wartend auf G_n - δ 's oder auf δ 's aus anderen Vertizes vom Herunter-Entwickeln der e -Funktion). Auch aus dem zweiten Term entstehen erneut die Zusammenhangs-Verhältnisse (a), (b) und zusätzlich (c): alle vier Köder an Hühnern. Als die gute Witwe Bolte ...

$$\begin{array}{c} \delta \\ \times \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} \delta \\ \delta \end{array} ; \quad (\text{a}) : \bigcirc \bigcirc \quad (\text{„Wolke“}) \quad , \quad (\text{b}) : \underline{\bigcirc} \quad , \quad (\text{c}) : \times$$

Und so weiter. Wenn vier numerierte Hühner auserwählt sind, je einen Köder zu schlucken, dann gibt es 4! Möglichkeiten der Zuordnung. Dies kürzt den eigentümlichen Faktor $1/4!$ bei Definition der Kopplung in (F.5).

Graphenregeln (nach Cheng+Li):

1. Draw all possible connected, topologically distinct, graphs with n external lines;
 2. For each internal line, put in the propagator factor $i\Delta$; for each vertex $-ig^2$;
 3. For each internal momentum P not fixed by momentum conservation at each vertex, perform an integration $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^4p$;
 4. Each graph has to be divided by a symmetry factor S corresponding to the number of permutations of internal lines one can make for fixed vertices.
- } (F.44)

Übungsaufgabe

Die einfachste Feldtheorie ist 0+1-dimensional, bosonisch und (wechselwirkungs-)frei:

$\mathcal{L} \rightarrow L = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$. Der Propagator \tilde{G}_2 soll ermittelt werden

- (a) auf „altem Wege“ (Rezept, Hamiltonian, Feldoperator, $G_2(t_1, t_2) \dots$) — und sodann
- (b) via $W[\tilde{j}]$. Finde zu beiden Wegen die geeignete Stelle für eine ε -Einbettung „von der physikalischen Seite her“ derart, daß sich eine (die gleiche?!) Polbeschreibung des Propagators ergibt. (*Gewiß, dies ist ein harmonischer Oszillator — aber einer „in Feldrichtung“!*)